MANUAL DE COMBINATORIA

J. R. Franco Brañas
M. C. Espinel Febles
P. R. Almeida Benítez

MANUAL DE COMBINATORIA

J. R. Franco Brañas
M. C. Espinel Febles
P. R. Almeida Benítez

DIRECCIÓN GENERAL DE UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN DEL GOBIERNO DE CANARIAS

Edita: *Dirección General de Universidades e Investigación del Gobierno de Canarias*

Imprime: *Litomaype, S.L.*
C/ Doctor Zamenhof, 34
38204 La Laguna - Tenerife
e-mail: litomaype@telefonica.net

ISBN: *84-609-4065-9*

Depósito Legal: *TF. 29/2005*

Autores: *José Ramón Franco Brañas, María Candelaria Espinel Febles, Pedro Ramón Almeida Benítez.*

Contenido

Introducción

En la actualidad, la Combinatoria ha adquirido una gran relevancia. Estudia la forma en que los conjuntos discretos pueden ser ordenados, contados y construidos. Está incluida dentro de la llamada Matemática Discreta, parte de las Matemáticas que trata acerca de los conjuntos discretos y las relaciones definidas entre los mismos y que es el fundamento de las Ciencias de la Computación.

La Combinatoria está presente en campos tan dispares como la Teoría de Autómatas, las Ciencias de la Computación, la Teoría de Grafos, la Teoría de Números, la Teoría de la Comunicación, la Cristalografía o la Mecánica de Partículas. En Química, se utiliza en el estudio de moléculas orgánicas. En Biología, en el estudio de epidemias y diseño de experimentos y Biología Molecular. En Economía, en los problemas de transporte, asignación de tareas, almacenamiento y distribución, etc.

El objetivo fundamental de este manual es el de familiarizar al lector con las técnicas de *conteo*, diagramas de árbol y estrategias de resolución de problemas, aprovechando todo ello para introducir los conceptos básicos de la Combinatoria y mostrar muchas de sus aplicaciones. Consta de ocho capítulos y pretende ser un manual sencillo y ordenado, presentando la materia de la siguiente forma: *técnicas de conteo* (utilizando árboles y tablas), *problemas de selección* (introduciendo los conceptos de variaciones y combinaciones), *problemas de particiones de conjuntos y descomposición de números naturales* (números de Stirling, de Catalan, de Bell, etc.) y *problemas de distribución de objetos en recipientes* (estudiando todas las posibilidades de un modo sistemático). Los capítulos van acompañados de ejemplos aclaratorios y ejercicios, todos resueltos, que aclaran los conceptos. Dichos capítulos son:

1. **Notas históricas.** Se hace en este capítulo una introducción al tema, mostrando el auge de la Combinatoria en los últimos años.

2. **Conjuntos y aplicaciones.** En él se repasan los conceptos algebraicos necesarios para el desarrollo de la Combinatoria.

3. **Técnicas de conteo.** En este capítulo, utilizando árboles y tablas, de un modo análogo a como se hizo durante siglos, se hace observar la dificultad del simple hecho de contar.

4. **Variaciones y combinaciones.** Una vez conocidas las técnicas elementales de conteo, se formaliza el concepto de variaciones y combinaciones.

5. **Potencia de un binomio. Triángulo de Pascal.** En este capítulo se trata una de las aplicaciones más útiles y antiguas de la Combinatoria.

6. **Particiones de un conjunto.** La partición de un conjunto y la descomposición de un número natural da lugar a los números de Stirling, Bell, Catalan y Lah, de gran utilidad en distintas aplicaciones.

7. **Distribuciones.** Este es un capítulo fundamental que resume los capítulos anteriores. En él se revisan todas las posibles distribuciones de objetos en recipientes.

8. **Funciones generatrices.** Estas funciones se utilizan para resolver muchos problemas de conteo, de relaciones de recurrencia o de identidades combinatorias.

Se puede considerar como un texto introductorio a la Combinatoria para estudiantes de ciencias, ingeniería y ciencias sociales. Además, es un buen manual de consulta para profesores de enseñanza secundaria y bachillerato, que pueden encontrar en el texto múltiples ejercicios para introducir a sus alumnos en técnicas de conteo y estrategias para la resolución de problemas.

Como dijimos anteriormente, la distribución de los capítulos anteriores está hecha de acuerdo con los tres grandes grupos en que se dividen los problemas de la Combinatoria:

1. *Problemas de selección.* Dado un conjunto de n elementos, queremos *seleccionar* k de ellos. Utilizaremos los conceptos de Variaciones y Combinaciones, según importe o no el orden de selección.

2. *Problemas de partición y descomposición.* Dado un conjunto de n elementos, queremos hacer una *partición* de él en subconjuntos de k elementos. O bien, dado un número natural n, queremos *descomponerlo* en sumandos.

3. *Problemas de distribución.* Deseamos *distribuir* k objetos en n recipientes. Hemos de tener en cuenta si los objetos son idénticos o no, al igual que los recipientes. Además, hemos de tener en cuenta si pueden quedar cajas vacías o con más de un objeto.

Por último, agradecer las críticas y sugerencias de profesores y alumnos, las cuales han contribuido a la mejora de este manual.

José Ramón Franco Brañas

María Candelaria Espinel Febles

Pedro Ramón Almeida Benítez

Símbolos y expresiones

	α	*alfa*		ν	*nu*
	β	*beta*	Ξ	ξ	*xi*
Γ	γ	*gamma*	O	o	*omicron*
Δ	δ	*delta*	Π	π	*pi*
	ϵ	*epsilon*		ρ	*ro*
	ζ	*dseta*	Σ	σ	*sigma*
	η	*eta*		τ	*tau*
Θ	θ	*theta*	Υ	υ	*ipsilon*
	ι	*iota*	Φ	ϕ	*fi*
	κ	*kappa*		χ	*ji*
Λ	λ	*lambda*	Ψ	ψ	*psi*
	μ	*mu*	Ω	ω	*omega*

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{Q}^+$	conjunto de los números racionales positivos
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\Rightarrow$	implicación
$\Leftrightarrow$	doble implicación
$\wedge$	*y* (conjunción lógica)
$\vee$	*o* (disyunción lógica)
$x \in A$	x pertenece al conjunto A
$x \notin A$	x no pertenece al conjunto A
$A \cup B$	unión de los conjuntos A y B
$A \cap B$	intersección de los conjuntos A y B
$/$	tal que
$\exists$	existe
$\forall$	para todo
$A \times B$	producto cartesiano de A por B
$A - B$	diferencia de los conjuntos A y B
$\approx$	aproximadamente
$A \subset B$	A es subconjunto de B

Capítulo 1

Notas históricas

1.1 La Combinatoria en la antigüedad

Si queremos enumerar los elementos de un conjunto que poseen una determinada propiedad o deseamos saber de cuántas formas podemos agrupar sus elementos, estamos ante dos problemas clásicos de Combinatoria. No es fácil dar una definición de Combinatoria que englobe la totalidad de sus métodos y aplicaciones. Jacobo Bernouilli en su obra *Ars Conjectandi* (1713) nos dice que "...la Combinatoria nos enseña a enumerar todos los modos posibles en que un conjunto dado de objetos puede mezclarse y combinarse de manera que estemos seguros de que no hemos omitido ninguno de los posibles...".

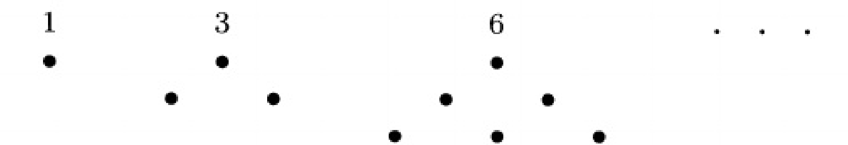
Por otra parte, la Combinatoria aparece en todas las civilizaciones antiguas. Sin embargo, es curioso el hecho de que casi todas las referencias a ella provienen de los países de Oriente: China, India y países árabes. Las referencias a la Combinatoria son escasas en la literatura antigua de los países occidentales.

En el libro chino I - Ching o *Libro de las mutaciones*, que es considerado el texto más antiguo de la Humanidad, se parte de un segmento continuo —— y otro partido en dos – – , que, dispuestos en grupos de tres, dan lugar a los $2^3 = 8$ elementos místicos (que corresponden a las variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 3 en 3 (ver sección 4.1.3 de este texto)):

Lo Creativo (Cielo)	——	——	——
Lo Receptivo (Tierra)	– –	– –	– –
Lo Susceptivo (Trueno)	– –	– –	——
Lo Abismal (Agua)	– –	——	– –
El Aquietarse (Montaña)	——	– –	– –
Lo Suave (Viento)	——	——	– –
Lo Adherente (Fuego)	——	– –	——
Lo Sereno (Lago)	– –	——	——

Estos 8 elementos, agrupados de 2 en 2, dan lugar a los $8^2 = 64$ hexagramas que constituyen el texto del I - Ching, que corresponden a las variaciones con repetición de 8 elementos tomados de 2 en 2 (ver sección 4.1.3).

En el siglo I a. de C., los pitagóricos estudiaron los llamados *números triangulares*, 1, 3, 6, 10, 15, ..., obtenidos añadiendo filas de puntos a un triángulo equilátero:



En el siglo IV, Pappus calcula el número de intersecciones de n rectas no paralelas, mediante dichos números triangulares.

En un documento del siglo I antes de Cristo, aparece en China por primera vez el llamado *cuadrado mágico*, que consiste en los números de 1 a 9 dispuestos en forma de matriz 3×3 de modo que sus filas, columnas y diagonales tengan igual suma. Un ejemplo podría ser

2	9	4
7	5	3
6	1	8

No existen indicios de que los chinos hiciesen progresos en el estudio de los cuadrados mágicos hasta el año 900 después de Cristo. Entre el 900 y 1300, chinos y árabes estudian intensivamente dichos cuadrados y los construyen de tamaño mayor que 3×3, por diversos métodos. Durante el siglo XIII, se produce el contacto entre las dos culturas, árabe y china, con intercambio de conocimientos, como queda patente en las tablillas de hierro de Jia Xiàn, que muestran cuadrados mágicos 6×6 escritos en caracteres arábigos.

Con posterioridad, los cuadrados mágicos pasan a Occidente a través del matemático bizantino de origen griego Moschopoulos, en 1315.

Por otra parte, la historia del llamado *triángulo de Pascal* es paralela, en cierto modo, a la de los cuadrados mágicos. Dicho triángulo recibió este nombre por aparecer en el *Tratado de Pascal* (1665) y no tenerse conocimiento acerca de los trabajos anteriores sobre él (ver sección 5.4). Los números del triángulo representan el número de subconjuntos de un conjunto:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

El triángulo ya era conocido por los hindús, que lo utilizaban para la obtención de raíces. Por tanto, el triángulo de Pascal era bien conocido en la antigüedad, aunque su divulgación en Occidente ocurre en el siglo XIII. Jordanus de Nemore presenta su

construcción y uso en su obra *De Arithmetica* (1225). Lo mismo hace Al Tusi en 1265 y los textos chinos del 1300, alguno de los cuales hace referencia a los orígenes del triángulo en 1100 en los escritos (ahora perdidos) de Jia Xiàn.

Pascal nos da un tratamiento deductivo moderno de muchas cuestiones relativas al triángulo, usando el principio de inducción (sección 2.4). Pascal deseaba aplicar el triángulo a problemas de azar.

Volviendo al inicio, las ideas básicas de la Combinatoria aparecen en los textos hindúes clásicos, aunque es difícil separar el texto original de posteriores comentarios y embellecimientos. Sin embargo, está claro que la fórmula (sección 4.1.1):

$$n(n-1)(n-2)\ \dots\ 3\cdot 2\cdot 1$$

para el número de permutaciones de un conjunto de n elementos, y la fórmula (sección 4.2):

$$\frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{k(k-1)\ \dots\ 2\cdot 1}$$

para el número de subconjuntos de orden k de un conjunto de n elementos, eran conocidas por Bhaskara (siglo XII), probablemente a través de Brahmagupta (siglo VI). Bhaskara, en su obra *Lilavati*, dice que las ideas combinatorias son útiles para verificar y analizar la variación de los esquemas musicales así como en la Medicina para hacer las combinaciones posibles de medicamentos diferentes.

También el erudito romano Boecio (480?-525) da una regla para encontrar las combinaciones de n elementos tomados dos a dos.

Durante los siglos X y XI, muchos matemáticos árabes, como Al Wafa, Al Biruni y Al Hayyam, investigan las ecuaciones y la extracción de raíces.

En 1321, el matemático judío Levi Ben Garson indica las fórmulas para calcular las permutaciones, variaciones y combinaciones de orden k de n elementos.

En la Europa medieval se desarrolló un cierto interés por la combinatoria debido en parte a la influencia de la Cábala. La Cábala es una especie de misticismo judío que conjuga los números con la Teología. El origen y existencia del Universo es explicado a través de las diez emanaciones divinas (sefirot) y de las 22 letras del alfabeto que, conjuntamente, constituyen los 32 transmisores de la sabiduría eterna. La expansión de la Cábala es debida principalmente a los judíos españoles. En 1552, un rabí, Moisés Cordovero, publica el libro *Pardes Rimmonim* en el que aborda las ideas combinatorias.

Hacia los siglos XV y XVI, los conceptos combinatorios aparecen ya en varios trabajos impresos. Así, por ejemplo, Tartaglia (1500-1557) los utilizó en estudios sobre el juego de dados y en el cálculo de la potencia de un binomio (sección 5.5).

1.2 Los orígenes de la Combinatoria moderna

El *Tratado de Pascal* (1665) se considera el punto de partida de la Combinatoria tal y como la conocemos hay en día. Leibniz en su *Disertatio de Arte Combinatoria* (1666) trata marginalmente la Combinatoria, basándose en los trabajos de Llull.

Con los estudios sobre Probabilidad, la Combinatoria pasó de ser un conjunto de técnicas para resolver determinados problemas a ser un campo de la Matemática.

Durante el siglo XVII, los avances en la notación algebraica permiten clarificar el nexo entre entre el Álgebra y la Combinatoria. Por ejemplo, la observación de que el desarrollo binomial se puede interpretar como el número de formas en que es posible elegir k objetos de un conjunto de tamaño n (sección 5.5). Leibniz probó el *teorema multinomial* (sección 5.6), dando la regla para hallar los coeficientes del desarrollo de

$$(x_1 + x_2 + \ \dots \ + x_r)^n$$

Otro descubrimiento de De Moivre (1718) fue la fórmula del número de *desordenaciones* de n objetos (sección 4.7):

$$n! \sum_{r=2}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}$$

aunque la fórmula anterior había sido obtenida anteriormente por Nicolás Bernouilli de un modo distinto.

En el siglo XVII, la materia adquirió consistencia teórica y práctica. Por ejemplo, la fórmula general de las combinaciones aparece en un libro de Hérigone en 1634. Pascal, Leibniz y otros escriben sobre cuestiones de combinatoria.

Por fin, Jacobo Bernoulli, en su Ars Conjectandi o "arte de conjeturar" (1713), trató extensamente problemas combinatorios y de probabilidades. En dicho texto se presentan los resultados básicos, prácticamente en la forma hoy usual.

También Euler contribuyó al avance de la Combinatoria con sus trabajos sobre factorización de polinomios y *cuadrados latinos* (matrices cuadradas de orden n en las que cada fila y cada columna son permutaciones de los elementos de un conjunto finito S, de n elementos). Son importantes sus artículos sobre partición o descomposición de enteros positivos en sumandos o el planteamiento y solución del problema de los Puentes de Könisberg.

Arthur Cayley tratando de calcular el número de isómeros de los hidrocarburos saturados hizo importantes descubrimientos (dos compuestos químicos se llaman isómeros si tienen la misma fórmula empírica pero distinta fórmula estructural).

El problema de los *cuatro colores*, formulado a mediados del siglo XVIII, que viene a plantear que cuatro colores son suficientes para colorear un mapa de modo que dos regiones adyacentes tengan distinto color, fue fuente de importantes resultados de la teoría de grafos.

La teoría de grafos ha contribuido enormemente al desarrollo de la Combinatoria. Los grafos sirven para modelar una gran variedad de relaciones entre elementos de un conjunto. Tiene aplicación en Química, Álgebra Numérica, Física Teórica, problemas socio-económicos, etc.

Por último, Lagrange, Cauchy y Galois profundizaron en las propiedades algebraicas de las permutaciones, lo que conocemos como *grupo de las sustituciones*, integrando la Combinatoria en la llamada Matemática Moderna.

1.3 La Combinatoria en la actualidad

Actualmente, la Combinatoria está presente en la Teoría de Autómatas, Ciencias de la Computación, Teoría de Números, Teoría de la Comunicación, así como en Crista-

lografía, Teoría de la Difusión y Mecánica de Partículas.

En Química, está presente en el estudio de moléculas orgánicas, así como en Biología, en el estudio de epidemias y diseño de experimentos, en los que la Combinatoria juega un papel fundamental.

En Economía, está presente en problemas de transporte, asignación de tareas, almacenamiento y distribución, etc.

Actualmente, la Combinatoria está incluida dentro de la llamada Matemática Discreta, parte de las Matemáticas que trata acerca de los conjuntos discretos y las relaciones definidas entre los mismos y que es el fundamento de la ciencia de la computación.

Bernouilli, Jacob. 1654-1705. Es el primero de una larga familia de matemáticos. Fue profesor de la Universidad de Basilea. Sus trabajos más importantes versan sobre Astronomía, Física, Geometría y Cálculo infinitesimal. En un trabajo publicado por Bernouilli en 1690 en el Acta Eruditorum aparece por vez primera la palabra "integral" con su significado actual de operación inversa a la diferenciación. En su obra Ars Conjectandi o "arte de conjeturar" (1713), trató la Combinatoria y la Probabilidad. Como hemos dicho, allí se presentan los resultados básicos, prácticamente en la forma hoy usual.

Euler, Leonhard. Nació en Basilea (Suiza) en 1707. Murió en 1783. Fue profesor en San Petersburgo y Berlín. Sus contribuciones más importantes son en Álgebra, Geometría Diferencial, Análisis y Mecánica. Su nombre aparece en todas las ramas de la Matemática: fórmulas de Euler, polinomios de Euler, constantes de Euler, integrales eulerianas, etc.

Fontana, Niccolo (Tartaglia). *Nació en Brescia en 1499 y murió en Venecia en 1557. En 1512, los franceses tomaron la ciudad de Brescia y él sufrió heridas que desfiguraron su cara y que le impidieron hablar con normalidad el resto de su vida. De ahí el apodo de Tartaglia ("tartamudo" en italiano).*

Autodidacta y profesor de matemáticas en Venecia. El primero en aplicar un método general para resolver ecuaciones cúbicas. Publicó diversos obras de matemáticas y balística y fue el primer traductor de los Elementos de Euclides y de los trabajos de Arquímedes.

Lagrange, Joseph Louis de. Nació en Turín en 1736 y murió en París en 1813. Además de sus trabajos sobre Combinatoria, Lagrange aplicó las matemáticas a la mecánica celeste y es el creador del sistema métrico decimal.

Llull, Raimundo (o Lulio, en castellano). Nació en Palma de Mallorca en 1235 y murió en el mismo lugar en marzo de 1316. Fue filósofo, alquimista, cabalista, astrólogo y matemático. Abruma la amplitud y profundidad de sus conocimientos. Escribió sobre las materias antes citadas, además también escribió sobre Fisiología y Navegación. Asimismo, fue novelista, poeta y músico. Escribió un total de 242 libros.

Newton, Isaac. *Nació en Whoolstorpe (Inglaterra) en 1642 y murió en Kensing-*

ton en 1727. Newton es considerado por muchos como el mejor matemático de todos los tiempos. A él se deben descubrimientos matemáticos, como el del Cálculo Diferencial, y físicos como la Ley de Gravitación Universal o la naturaleza de la luz. Sus descubrimientos más importantes están recogidos en su obra Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.

Pascal, Blaise. *Nació en Clermont-Ferrand en 1623. Con 16 años escribió su Ensayo sobre las cónicas y a los 19 ideó una máquina de calcular. Publicó diversos estudios sobre el vacío y ensayos sobre teología. Murió en París en 1662.*

Leonardo de Pisa (Fibonacci). *Nació en Pisa (Italia) hacia 1170 y murió en la misma ciudad en 1250. Fue el matemático más notable de la Edad Media. En sus viajes por Egipto y Siria, estudio los métodos de numeración y cálculo de los árabes, que introdujo en Europa. Entre sus obras figuran Liber Abaci, Practica Geometriae, extensa obra de geometría y trigonometría, y Liber Quadratorum, donde aproximó las raíces cúbicas con nueve dígitos.*

Capítulo 2

Conjuntos y aplicaciones

Vamos a repasar las nociones básicas acerca de los conjuntos y aplicaciones entre ellos, que suponen una ayuda para el posterior desarrollo de la teoría.

2.1 Conjuntos

Un *conjunto* es una colección desordenada de objetos que se denominan *elementos*.

La determinación de un conjunto la podemos hacer de dos maneras, por *extensión* o por *comprensión*. Por *extensión*, es decir, enumerando a todos sus elementos. Por *comprensión*, enunciando la propiedad que cumplen todos sus elementos. Por ejemplo:

$$A = \{\text{días de la semana}\}$$

$$A = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$

Se suele denotar a los conjuntos con letras mayúsculas y a sus elementos con minúsculas. Por ejemplo, $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Si un elemento x pertenece al conjunto A se escribe $x \in A$. Si el elemento x no pertenece al conjunto A se escribe $x \notin A$.

Dos conjuntos son iguales si, y sólo si, ambos tienen los mismos elementos.

Se llama *cardinal* $|A|$ de un conjunto A al número de elementos de A. Si $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, entonces $|A| = 5$.

Se llama conjunto *vacío* a aquél conjunto que carece de elementos. Se representa por $\emptyset$.

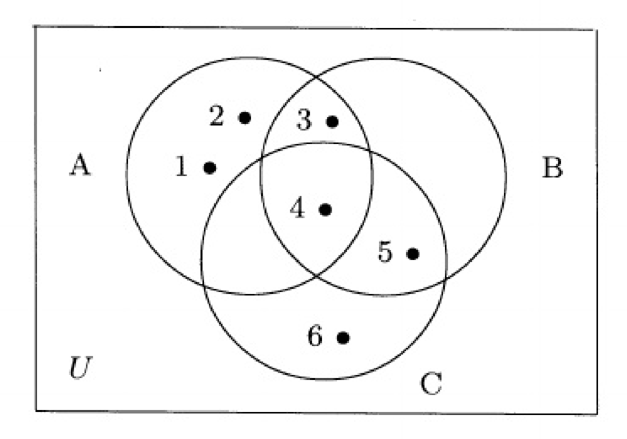
Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es *subconjunto* de B o que A está incluido en B si todos los elementos que pertenecen a A también pertenecen a B. Se representa $A \subset B$. Para cualquier conjunto A, se verifica $\emptyset \subset A$ y $A \subset A$.

Se llama *conjunto universal o referencial* U a aquél que contiene a todos los conjuntos con los que estamos trabajando.

Dados dos conjuntos U y A, tales que $A \subset U$, al conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A se le llama conjunto *complementario* $\overline{A}$ de A respecto a U, y se representa:

$$\overline{A} = \{x \in U \ / \ x \notin A\}$$

Los conjuntos se pueden representar gráficamente mediante los llamados *diagramas de Euler*. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{4, 5, 6\}$, podemos hacer una representación gráfica:



Dado un conjunto A, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A se le llama *conjunto potencia* o *conjunto de las partes* de A y se denota por $P(A)$. Por ejemplo, dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Se verifica que $|P(A)| = 2^{|A|}$, como veremos en el capítulo 4. En el ejemplo anterior, $|P(A)| = 2^3 = 8$.

Se llama *producto cartesiano* $A \times B$ de los conjuntos A y B, al conjunto formado por todos los pares ordenados de elementos (x, y), donde $x \in A$ e $y \in B$. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Se verifica que $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$.

2.1.1 Intersección y unión de conjuntos

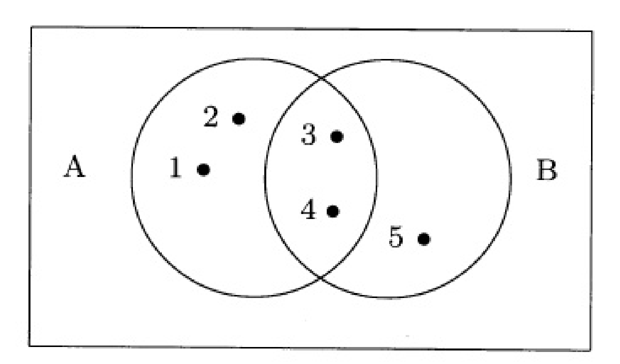
Dados dos conjuntos A y B, se llama *intersección* de A y B al conjunto formado por los elementos comunes a A y B. Se representa por $A \cap B$.

Dados dos conjuntos A y B, se llama *unión* de A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen al menos a uno de dichos conjuntos. Se representa por $A \cup B$.

Por ejemplo, dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$:

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



El cardinal de la unión de dos conjuntos A y B es:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ya que los elementos que pertenecen a la vez a A y a B se han contado dos veces, una como elementos de A y otra como elementos de B, por lo que se tienen que restar una vez.

Por ejemplo, sean los conjuntos anteriores $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Se tiene que $|A \cup B| = 7$, $|A| = 5$, $|B| = 4$ y $|A \cap B| = 2$, entonces $|A \cup B| = 5 + 4 - 2 = 7$.

Para tres conjuntos A, B y C, el cardinal de la unión es:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

ya que los elementos que pertenecen a la vez a los tres conjuntos se han incluido tres veces en $|A| + |B| + |C|$, y luego excluido otras tres veces en $|A \cap B|$, $|B \cap C|$ y $|C \cap A|$, por lo que habrá que sumarlos otra vez en $|A \cap B \cap C|$.

En general, si A_1, A_2, ..., A_n son conjuntos finitos:

$$\left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ \dots \ + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

La anterior fórmula se conoce con el nombre de *principio de inclusión-exclusión*.

Se dice que dos conjuntos A y B son *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$, es decir, si no tienen ningún elemento común.

Dados dos conjuntos A y B disjuntos, el cardinal de $A \cup B$ es igual al cardinal de A más el cardinal de B, ya que $|A \cap B| = 0$:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

Se define la *diferencia* $A - B$ de dos conjuntos A y B como el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A y que no están en B.

2.1.2 Multiconjuntos

Se llama *multiconjunto* de un conjunto U a toda configuración no ordenada de elementos, repetidos o no, de U (ver Almeida y Franco [2]). Por ejemplo, las letras de la palabra *matematicas* (sin tilde, con perdón) forman un multiconjunto del conjunto $\{a, c, e, i, m, s, t\}$. A dicho multiconjunto se le denota, en orden alfabético, de la siguiente manera

$$\}a, a, a, c, e, i, m, m, s, t, t\{$$

Se llama *multiplicidad* de un elemento perteneciente a un multiconjunto al número de veces que este elemento aparece en el multiconjunto.

Todo conjunto no vacío es un multiconjunto en el que todos sus elementos tienen multiplicidad igual a uno. Por otra parte, la multiplicidad de los elementos de un multiconjunto U, la podemos considerar como una aplicación p de U en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto, cada multiconjunto de un conjunto U tiene asociada una aplicación de U en $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por ejemplo, para el multiconjunto $U = \}a, a, a, c, e, i, m, m, s, t, t\{$ del conjunto $\{a, c, e, i, m, s, t\}$, tenemos la siguiente aplicación de multiplicidad:

$$\begin{aligned} p:\ U &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \\ a &\rightarrow 3 \\ c &\rightarrow 1 \\ e &\rightarrow 1 \\ i &\rightarrow 1 \\ m &\rightarrow 2 \\ s &\rightarrow 1 \\ t &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

2.1.3 Conjuntos numéricos

En Matemáticas existen ciertos conjuntos que desempeñan un papel muy destacado. Son los llamados *conjuntos numéricos*:

1. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

2. El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

3. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales:

$$\mathbb{Q} = \{a/b,\ si\ a \in \mathbb{Z} \ \wedge \ b \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$

4. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales:

$$\mathbb{R} = \{racionales\} \cup \{irracionales\}$$

Los números irracionales son aquellos cuya expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas. Por ejemplo, el número π, el número e, $\sqrt{2}$, etc.

5. El conjunto **C** de los números complejos:

$$\mathbb{C} = \{a + bi, \ con \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Unos importantes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son los llamados intervalos abiertos e intervalos cerrados. Si a y b son dos números reales:

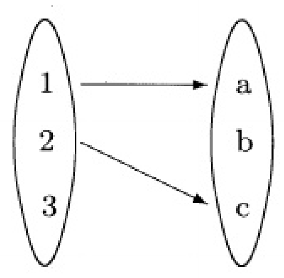
$$El \ \ intervalo \ abierto \ (a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \ a < x < b\}$$

$$El \ intervalo \ cerrado \ [a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \ a \leq x \leq b\}$$

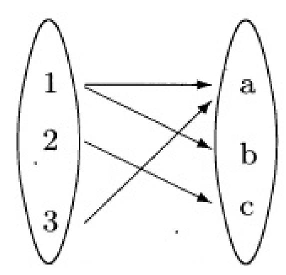
2.2 Aplicaciones entre conjuntos

Una *aplicación* entre dos conjuntos A y B es una correspondencia entre A y B, denominados, respectivamente, conjunto inicial y final, en la que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde uno, y sólo uno, del conjunto final.

Por ejemplo, dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$, si establecemos la correspondencia representada en la figura, decimos que el elemento a es la imagen del elemento 1 o que el 1 es original del elemento a. Esta correspondencia no es una aplicación ya que el 3 no tiene imagen.



La correspondencia de la figura siguiente tampoco es aplicación ya que el 1 tiene dos imágenes diferentes: a y b.

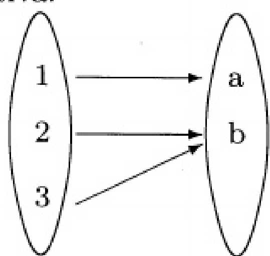


Una aplicación se llama *inyectiva* si los elementos que son imagen lo son de uno sólo.

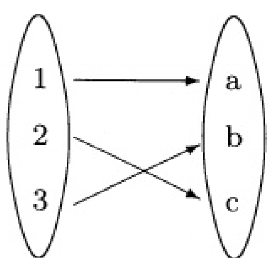
Una aplicación se llama *exhaustiva* (o *suprayectiva* o *sobreyectiva*) cuando todo elemento del conjunto final tiene al menos un original.

Por último, una aplicación *biyectiva* (o *biunívoca*) es aquella que es inyectiva y exhaustiva simultáneamente.

La siguiente aplicación es inyectiva, pues cada elemento que es imagen, a, c, lo es de uno sólo. Sin embargo, no es exhaustiva ya que el b no tiene original y, en consecuencia, no es biyectiva:



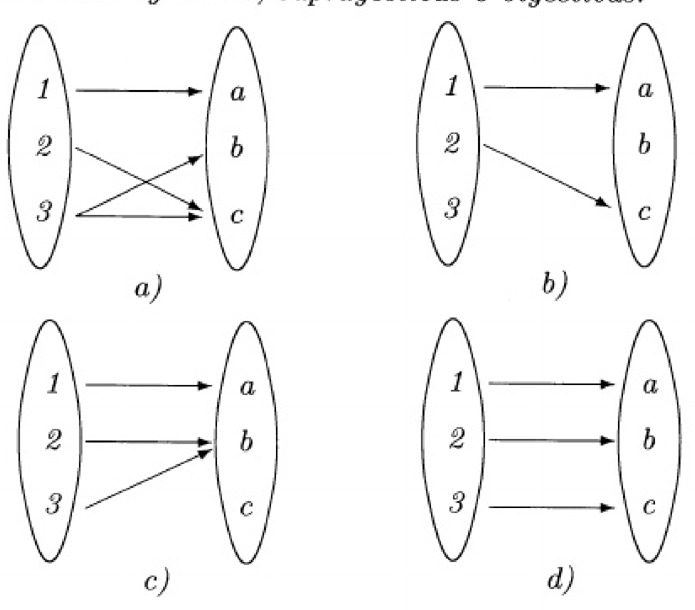
La siguiente aplicación es exhaustiva ya que cada elemento del conjunto final posee algún original. Sin embargo, no es inyectiva porque b tiene dos originales diferentes 2 y 3. En consecuencia, no es biyectiva:



La siguiente aplicación es inyectiva y exhaustiva y, por tanto, biyectiva:

1 → a, 2 → c, 3 → b

Ejemplo 2.1 *De las siguientes correspondencias, averiguar cuáles de ellas son aplicaciones, indicando si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas.*



Resolución: a) No es una aplicación, ya que el elemento 3 posee dos imágenes: b y c.

b) No es una aplicación, ya que el elemento 3 no posee imagen.

c) Es una aplicación, ya que todos los elementos poseen una sola imagen. No es inyectiva, ya que el 2 y el 3 tienen la misma imagen: b. Tampoco es suprayectiva, ya que el elemento c carece de original.

d) Es una aplicación, ya que todos los elementos poseen una sola imagen. Es inyectiva, ya que no hay dos elementos con la misma imagen. Es suprayectiva, ya que todos los elementos del conjunto final poseen un elemento original. Por tanto, es una aplicación biyectiva.

2.3 Estructuras algebraicas

Definición 2.1 *Se dice que el par $(A, *)$ es un semigrupo si se verifica:*
1. *La operación $*$ es interna en A: $x * y \in A,\ \forall\ x, y \in A$.*
2. *La operación $*$ es asociativa en A: $x * (y * z) = (x * y) * z,\ \forall\ x, y, z \in A$.*

Si la operación $*$ es conmutativa, el semigrupo se llama abeliano o conmutativo.

Ejemplo 2.2 *El par $(\mathbb{Z}, \cdot)$ es semigrupo abeliano con elemento neutro.*

Definición 2.2 *Se dice que el par $(A, *)$ es un grupo si se verifica:*
1. *La operación $*$ es interna en A: $x * y \in A,\ \forall\ x, y \in A$.*
2. *La operación $*$ es asociativa en A: $x * (y * z) = (x * y) * z,\ \forall\ x, y, z \in A$.*
3. *Existe un elemento neutro e en A: $x * e = e * x = x,\ \forall\ x \in A$.*
4. *Existe elemento simétrico $x' \in A,\ \forall\ x \in A$: $x * x' = x' * x = e$.*

Si la operación $*$ es conmutativa, el grupo se llama abeliano o conmutativo.

Ejemplo 2.3 *El par $(\mathbb{Z},+)$ es un grupo abeliano.*

Definición 2.3 *Se dice que la terna $(A, +, \cdot)$ es un anillo si se verifica:*
1. *El par $(A, +)$ es grupo abeliano.*
2. *La operación $\cdot$ es interna en A: $x \cdot y \in A,\ \forall\ x, y \in A$.*
3. *La operación $\cdot$ es asociativa en A: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ \forall\ x, y, z \in A$.*
4. *La operación $\cdot$ es distributiva respecto a $+$: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z,\ \forall\ x, y, z \in A$.*

Si la operación $\cdot$ es conmutativa, el anillo se llama conmutativo.

Ejemplo 2.4 *La terna $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ es un anillo conmutativo.*

Definición 2.4 *Se dice que la terna $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo si se verifica:*
1. *El par $(A, +)$ es grupo abeliano, con elemento neutro e.*
2. *El par $(A - \{e\}, \cdot)$ es grupo.*
3. *La operación $\cdot$ es distributiva respecto a $+$: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z,\ \forall\ x, y, z \in A$.*

Si la operación $\cdot$ es conmutativa, el cuerpo se llama conmutativo.

Ejemplo 2.5 *Las ternas $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ son cuerpos conmutativos.*

2.4 El principio de inducción matemática

Consideremos el polinomio $P(n) = n^2+n+41$, debido a Euler, y sus valores numéricos para $n = 0, 1, 2, ...$:

$$P(0) = 41$$
$$P(1) = 43$$
$$P(2) = 47$$
$$P(3) = 53$$
$$P(4) = 61$$

Hemos obtenido números primos para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Para $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$, obtenemos los números primos 71, 83, 97, 113, 131 y 151, respectivamente. ¿Podemos afirmar que el valor numérico de $P(n)$ es un número primo para todo valor natural de n?. La respuesta es NO. Para $n = 40$:

$$P(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = (40+1) \cdot 41 = 41^2$$

que no es un número primo. El polinomio anterior produce números primos para $n = 0, 1, 2, ..., 39$, pero falla para $n = 40$. Por tanto, es inadmisible y peligroso establecer una proposición general para todo valor natural de n, basándose en proposiciones que se han encontrado verdaderas para valores particulares de n.

La cuestión es la siguiente: Si una proposición se cumple para determinados valores naturales, ¿cómo podremos determinar que es cierta para todo valor natural?.

Para contestar a esta pregunta empleamos la llamada *inducción completa* o *método de inducción*, que viene dada por el siguiente teorema.

Teorema.- Una proposición se cumple para todo número natural si se verifica:

a) Dicha proposición es cierta para $n = 1$.

b) Si se supone que la proposición es cierta para un valor natural cualquiera $n = k$, ello implica que es cierta para $n = k + 1$ (efecto dominó).

Nota.- Se ha visto, en el ejemplo anterior del polinomio de Euler, el error que se puede cometer al pasar por alto la condición b). El siguiente teorema "falaz" muestra que tampoco se puede obviar la condición a).

Teorema (teorema "falaz").- Todo número natural es igual al número natural que le sigue.

Demostración: Se supone cierta para $n = k$:

$$k = k + 1 \qquad (1)$$

y se quiere probar que

$$k + 1 = k + 2 \qquad (2)$$

En efecto, sumando 1 a ambos miembros de (1), se obtiene (2). Por tanto, si la proposición es cierta para k, también lo es para $n = k + 1$.

¡El error estuvo en considerar únicamente la condición b) del principio de inducción!.

Ejemplo 2.6 *Demostrar por inducción la fórmula*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Resolución: Hemos de ver que es cierta para n=1. En efecto:

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

Suponemos que es cierta para $n = k$, esto es:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Por último, hemos de demostrar que es cierta para $n = k+1$. En efecto:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{k+1}{6}\,[k(2k+1) + 6(k+1)] =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1 *Demostrar que: a) $A \cap B = B \Rightarrow B \subset A$, b) $A \cup B = A \Rightarrow B \subset A$.*

Resolución: a) Tomamos un elemento cualquiera $x \in B$. Por hipótesis, $A \cap B = B$, entonces $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, como queríamos demostrar.

b) Tomamos un elemento cualquiera $x \in B$. Entonces, $x \in A \cup B$. Por hipótesis, $A \cup B = A$. Entonces $x \in A$, como queríamos demostrar.

Ejercicio 2.2 *Dados los conjuntos $A, B \subset U$, demostrar que*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{(ley de De Morgan)}$$

Resolución: En primer lugar, vamos a demostrar que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Tomamos un elemento cualquiera $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \ \wedge \ x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Vamos a demostrar ahora que $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Tomamos un elemento cualquiera $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \ \wedge \ x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Ejercicio 2.3 *Demostrar que, en general,* $\overline{A \cup B} \neq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Resolución: Vamos a hacerlo mediante un contraejemplo.

Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. *Entonces:*

$$\overline{A \cup B} = \overline{\{1, 2, 3, 4, 5\}} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{\{1, 2\}} \cup \overline{\{2, 3, 4, 5\}} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{1, 6, 7, 8, 9, 10\} =$$
$$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Por tanto, en general, $\overline{A \cup B} \neq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejercicio 2.4 *En una caja hay 100 manzanas de las que 20 tienen gusano y 15 están podridas. Sólo son aptas para la venta las manzanas sin gusanos y que no estén podridas. Si hay 10 manzanas podridas con gusano, ¿cuántas manzanas podemos vender?*

Resolución: Sean G *y* P *los conjuntos de manzanas con gusano y podridas, respectivamente. Entonces:*

$$|G \cup P| = |G| + |P| - |G \cap P| = 20 + 15 - 10 = 25$$

manzanas no aptas para la venta. Por tanto, nos quedan 75 manzanas para vender.

Ejercicio 2.5 *En un club hay 10 personas que juegan al tenis, 15 personas que juegan al squash y 12 que juegan al badminton. De todas ellas, 5 juegan al tenis y al squash, 4 al tenis y badminton, 3 al squash y badminton y, por último, 2 juegan a los tres deportes. ¿Cuántas personas juegan al menos a uno de los tres deportes?*

Resolución: Sean T, S *y* B *los conjuntos de personas que juegan al tenis, squash y badminton, respectivamente. Entonces:*

$$|T \cup S \cup B| = |T| + |S| + |B| - |T \cap S| - |T \cap B| - |S \cap B| + |T \cap S \cap B| =$$
$$= 10 + 15 + 12 - 5 - 4 - 3 + 2 = 27$$

personas practican uno de los tres deportes.

Ejercicio 2.6 *Encuentra una fórmula para el cardinal de la unión de cuatro conjuntos.*

Resolución: Por el principio de inclusión-exclusión:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| -$$
$$-|B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| +$$
$$+|A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

Ejercicio 2.7 *Demostrar por inducción la fórmula:*

$$1+2+3+...+n=\frac{n+n^2}{2}.$$

Resolución: Comprobamos que es cierta para $n=1$*:* $1=\frac{1+1}{2}$.

Suponemos que es cierta para $n=k$*:*

$$1+2+3+...+k=\frac{k+k^2}{2}$$

Hemos de demostrarla para $n=k+1$*. En efecto:*

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k+k^2}{2}+k+1=\frac{k+k^2+2k+2}{2}=$$

$$=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)+(k+1)^2}{2}$$

Ejercicio 2.8 *Demostrar por inducción que, para todo* $x \geq 0$*, se verifica la fórmula de Bernouilli:* $(1+x)^n \geq 1+nx$*, con* $n \in \mathbb{N}$*.*

Resolución: Para $n=1$ *es evidente. Suponemos que es cierta para* $n=k$ *y hemos de demostrarla para* $n=k+1$*. Si es cierto que* $(1+x)^k \geq 1+kx$*, como* $1+x>0$*, tenemos que:*

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\geq(1+kx)(1+x)=$$
$$=1+(k+1)x+kx^2\geq 1+(k+1)x$$

ya que $kx^2 \geq 0$.

Ejercicio 2.9 *Demostrar que la aplicación f del conjunto* $\mathbb{N}$ *en si mismo, que a cada número natural le hace corresponder n+3, es inyectiva pero no biyectiva.*

Resolución: Supongamos que dos números $m,n \in \mathbb{N}$ *tienen la misma imagen* $f(m)=f(n)$*. Entonces,* $m+3=n+3 \Rightarrow m=n$*, lo que nos indica que f es inyectiva.*

Por otra parte, el número $2 \in \mathbb{N}$ *carece de original en* $\mathbb{N}$*, ya que* $f^{-1}(2)=-1$*, y* $-1 \notin \mathbb{N}$*. Por tanto, la aplicación no es sobreyectiva y, por tanto, no es biyectiva.*

Ejercicio 2.10 *Demostrar que la aplicación f del conjunto* $\mathbb{Q}$ *en si mismo, que a cada número racional x le hace corresponder* $3x+2$*, es biyectiva.*

Resolución: Supongamos que dos números $x,y \in \mathbb{Q}$ *tienen la misma imagen* $f(x)=f(y)$*. Entonces,* $3x+2=3y+2 \Rightarrow x=y$*, lo que nos indica que f es inyectiva.*

Por otra parte, cualquier número racional $y \in \mathbb{Q}$ *posee un original* $\frac{y-2}{3} \in \mathbb{Q}$*, ya que* $f(\frac{y-2}{3})=3(\frac{y-2}{3})+2=y$*. Por tanto, la aplicación es sobreyectiva y, por ser también inyectiva, es biyectiva.*

Ejercicio 2.11 *Sea f una aplicación de E en F, y sean A y B subconjuntos de E. Demostrar:*

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Resolución: a) Sea $y \in f(A)$. *Entonces, existe* $x \in A \; / \; f(x) = y$. *Por hipótesis,* $A \subset B$. *Por tanto,* $x \in B$. *De aquí,* $f(x) = y \in f(B)$. *Hemos demostrado que un elemento cualquiera* $y \in f(A)$, *cumple que* $y \in f(B)$. *Por tanto,* $f(A) \subset f(B)$.

b) Sea $y \in f(A \cup B)$. *Entonces, existe* $x \in A \cup B \; / \; f(x) = y$. *Pero* $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ *ó* $x \in B$. *Si* $x \in A$, *entonces* $y = f(x) \in f(A)$. *Si* $x \in B$, *entonces* $y = f(x) \in f(B)$. *Por tanto,* $y \in f(A)$ *ó* $y \in f(B)$. *Forzosamente,* $y \in f(A) \cup f(B)$.

c) Sea $y \in f(A \cap B)$. *Entonces, existe* $x \in A \cap B \; / \; f(x) = y$. *Pero* $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow y = f(x) \in f(A) \wedge y = f(x) \in f(B) \Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$.

Capítulo 3

Técnicas de conteo

Contar los elementos de un conjunto finito es establecer una aplicación biyectiva entre dicho conjunto y el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ para un determinado n, donde n es, precisamente, el *cardinal* del conjunto.

Las *técnicas de conteo* nos permiten cuantificar eventos difíciles de enumerar. Por ejemplo, si a una reunión asisten tres personas A, B y C, que brindan chocando sus copas y queremos saber el número de choques, está claro que la respuesta es 3, ya que A choca su copa con B, B choca su copa con C y, por último, A con C. Cuantificar el número de choques ha sido muy fácil. Pero si el número de personas es 8 en lugar de 3, empezamos a tener dificultades. Tendremos que hacer uso de alguna "técnica de conteo".

Vamos a proponer problemas sencillos con el objeto de investigar posibilidades y encontrar estrategias adecuadas para su resolución, apoyándonos en ideas intuitivas.

Inicialmente, estudiaremos los principios básicos para contar los elementos de un conjunto: el *principio de la adición*, *principio del producto* y el principio de inclusión-exclusión.

3.1 Principios de la adición y del producto

El *principio de la adición*, también llamado *regla de la suma* o *primera regla de conteo*, es una regla básica que aparece en muchos cálculos elementales y que solemos utilizar de forma intuitiva, sin ni siquiera percibir su uso. En general, viene a decir que *si podemos realizar una primera tarea de m maneras, mientras que una segunda tarea la podemos realizar de n maneras y no se pueden realizar las dos tareas simultáneamente, entonces podemos realizar cualquiera de ellas dos de $m + n$ maneras.*

A modo de ejemplo, si a una reunión asisten 7 hombres y 4 mujeres, evidentemente, tenemos 7 formas de elegir un hombre entre los 7 hombres asistentes y 4 maneras de elegir una mujer entre las 4 mujeres asistentes. Si nos planteamos de cuántas maneras diferentes podemos elegir una persona entre los asistentes a la reunión, concluimos que el número total de posibilidades es de $7 + 4 = 11$.

Este *principio de la adición* admite una formulación mediante la teoría de conjuntos, utilizando el concepto de *cardinal* de un conjunto. Recordemos que se llama *cardinal* de un conjunto A al número de elementos que posee y se designa por $|A|$. Podemos reformular el *principio de la adición* de la siguiente manera:

Dados dos conjuntos A y B disjuntos, el cardinal de $A \cup B$ es igual al cardinal de A más el cardinal de B:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

Si los conjuntos no fuesen disjuntos, tendríamos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

En efecto, si sumamos el cardinal de A con el de B habremos contado dos veces el cardinal de la intersección, que tendremos que restar una vez para obtener el cardinal de la unión de A con B.

Como ejemplo, vamos a calcular el total de números naturales múltiplos de 3 o de 5, que son menores que 1000. Sean:

$$M_3 = \{n \in I\!N;\ n \text{ múltiplo de } 3\}$$

$$M_5 = \{n \in I\!N;\ n \text{ múltiplo de } 5\}$$

El cardinal de M_3 es el número n de términos de una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$, último término $a_n = 999$ y diferencia $d = 3$. Por tanto, $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 999 = 3 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow n = 333$. De otro modo, el cardinal de M_3 es la parte entera de $1000/3 = 333.333....$ El de M_5 será la parte entera de $1000/5 = 200$. el conjunto $M_3 \cap M_5$ no es vacío, ya que sus elementos son los múltiplos de 15. Su cardinal será la parte entera de $1000/15 = 66.666....$ Por tanto:

$$|M_3 \cup M_5| = |M_3| + |M_5| - |M_3 \cap M_5| = 333 + 200 - 66 = 467$$

El *principio de la multiplicación*, también llamado *regla del producto* o *segunda regla de conteo*, es otro principio básico, que solemos aplicar de forma intuitiva. Viene a decir que si un procedimiento se puede separar en dos etapas, primera y segunda, y si hay m resultados posibles para la primera etapa y n para la segunda, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden designado, de $m \cdot n$ maneras.

Esta regla también se puede expresar en términos de la teoría de conjuntos, haciendo uso del producto cartesiano. Así:

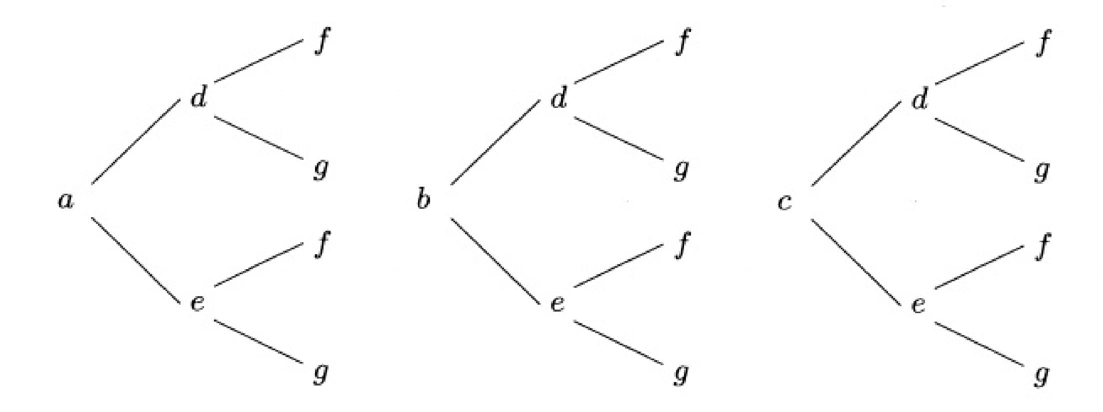
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Para el producto de más de dos conjuntos se cumple la identidad semejante:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_n|$$

Ejemplo 3.1 *Un restaurante dispone de 3 variedades del primer plato: a, b y c, de 2 variedades del segundo: d y e, y de 2 variedades de postre: f y g. ¿De cuántas formas se puede confeccionar un menú consistente en primer plato, segundo plato y postre?*

Resolución: De un modo análogo al ejercicio anterior, según el principio del *producto, tenemos* $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ *maneras de confeccionar el menú. Con un diagrama de árbol:*



He aquí los 12 menús:

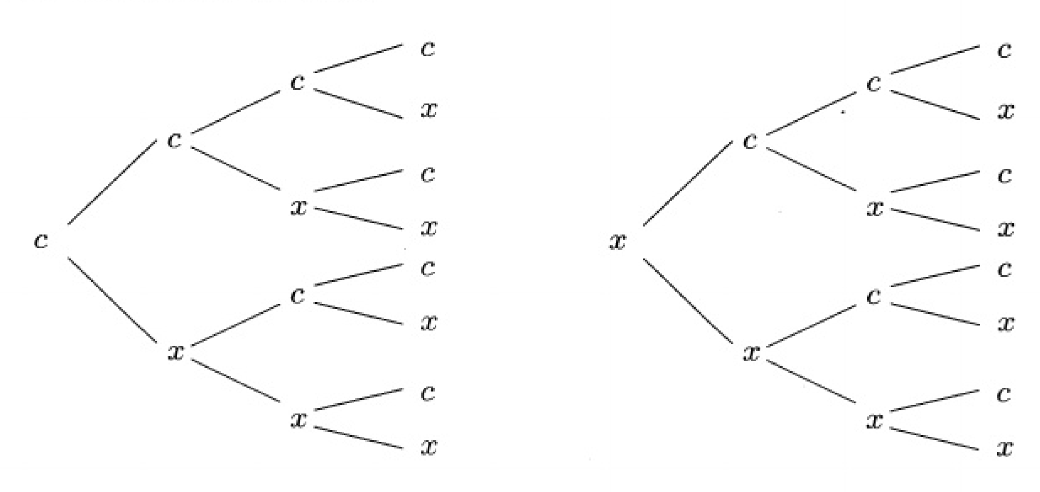
a	d	f	b	d	f	c	d	f
a	d	g	b	d	g	c	d	g
a	e	f	b	e	f	c	e	f
a	e	g	b	e	g	c	e	g

Ejemplo 3.2 *Se lanza cuatro veces una moneda. ¿Cuál es el número de resultados posibles?*

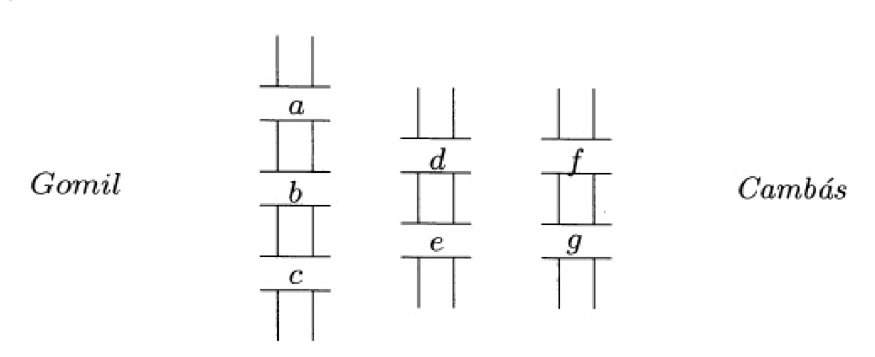
Resolución: Se trata de una experiencia de cuatro pruebas independientes. Los resultados posibles son cara y cruz: c *y* x*. En total habrá, según la* regla del producto, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ *resultados posibles:*

c	c	c	c	c	x	c	c	x	c	c	c	x	x	c	c
c	c	c	x	c	x	c	x	x	c	c	x	x	x	c	x
c	c	x	c	c	x	x	c	x	c	x	c	x	x	x	c
c	c	x	x	c	x	x	x	x	c	x	x	x	x	x	x

Con un diagrama de árbol:

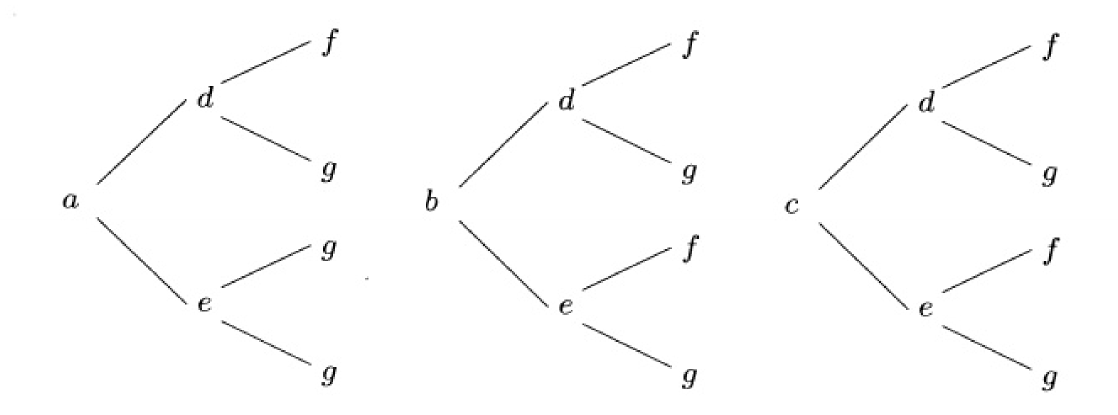


Ejemplo 3.3 *Para ir de la ciudad de Gomil a la ciudad de Cambás tenemos que atravesar tres puentes sobre tres ríos, tal como indica el mapa. Los puentes están indicados con las letras a, b, c, d, e, f y g. ¿Cuántas rutas diferentes hay cruzando cada puente una sola vez?*



Investiga con distinto número de puentes y distinto número de ríos. ¿Puedes encontrar una regla que sirva para averiguar el número de rutas?

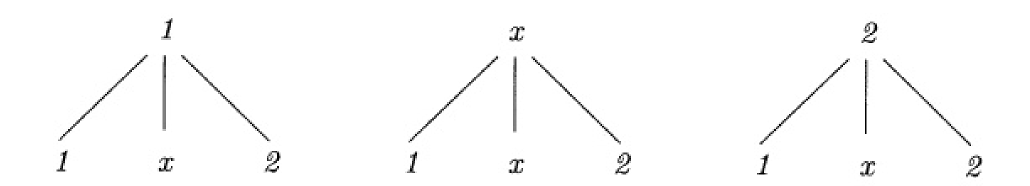
Resolución: Para cruzar el primer rio hay tres puentes: a, b ó c. Para el segundo rio hay dos puentes: d ó e. Para el tercer rio hay dos puentes: f ó g. En total, según la regla del producto, *hay* $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ *caminos posibles. Utilizando diagramas de árbol:*



En general, el número total de rutas entre dos ciudades, separadas por un número cualquiera de ríos, podemos calcularlo mediante el producto del número de puentes sobre cada rio.

Ejemplo 3.4 *¿Cuántas quinielas de fútbol será preciso rellenar para tener la seguridad de acertar los 14 resultados?*

Resolución: Para el primer partido hay 3 posibilidades: 1, x ó 2. Para el segundo partido hay otras 3 posibilidades: 1, x ó 2. Por tanto, para los dos primeros partidos, según la regla del producto, *hay* $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ *posibilidades.*



Del mismo modo, para los tres primeros partidos, según la regla del producto, hay $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ *posibilidades. Análogamente, para los cuatro primeros partidos hay* $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ *posibilidades.*

Para los 14 partidos habrá, según la regla del producto, $3^{14} = 4782969$ *posibilidades.*

Ejemplo 3.5 *Aplicar la regla del producto para demostrar que un conjunto finito de* n *elementos posee* 2^n *subconjuntos.*

Resolución: Sea el conjunto $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *con* n *elementos. Un subconjunto se puede construir en* n *pasos sucesivos: elegir o no* x_1*, elegir o no* x_2*, ..., elegir o no* x_n*. Cada paso puede efectuarse de 2 maneras. Por tanto, el número de subconjuntos posibles, según la regla del producto, es:*

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \; ... \; 2 = 2^n$$

Ejemplo 3.6 *Sabiendo que un bit es un* 0 *o bien un* 1*, ¿cuántas cadenas diferentes de ocho bits se pueden formar?*

*Resolución: Una cadena de ocho bits puede construirse en ocho pasos sucesivos: seleccionar el primer bit, seleccionar el segundo bit, ..., seleccionar el octavo bit. Dado que hay dos posibilidades (*0 *ó* 1*) para cada bit, por la regla del producto, el número total de cadenas de ocho bits es:*

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$$

¿Cuántas de estas cadenas comienzan por 101 *o bien por* 111*?*

Resolución: En este caso sólo hay que seleccionar el cuarto, quinto, sexto, séptimo y octavo bits. Se puede hacer en cinco pasos sucesivos, con dos posibilidades en cada uno de ellos: 0 *ó* 1*. Por tanto, por la regla del producto hay:*

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

Puesto que hay 32 cadenas que comienzan por 101 *y otras 32 cadenas que comienzan por* 111*, según la regla de la suma, hay* $32 + 32 = 64$ *cadenas de ocho bits que empiezan por* 101 *o bien por* 111*.*

¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan por 110 *o bien el quinto bit es igual a* 0*?*

Resolución: Aplicando el razonamiento anterior, encontramos $2^5 = 32$ *cadenas de ocho bits que empiezan por* 110. *Asimismo, hay* $2^7 = 128$ *cadenas que tienen un* 0 *en quinto lugar, ya que cada uno de los siete bits restantes se puede seleccionar de* 2 *formas distintas.* Aplicaremos el principio de la suma. *Si denotamos por:*

$$A_1 = \{\textit{cadenas de ocho bits que empiezan por } 110\}$$

$$A_2 = \{\textit{cadenas de ocho bits cuyo quinto bit es } 0\}$$

se tiene:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

El cálculo de $|A_1 \cap A_2|$ *es análogo, y nos proporciona:*

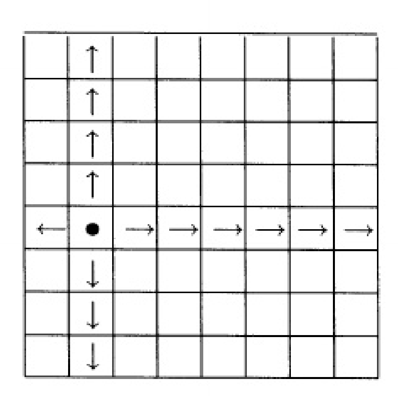
$$|A_1 \cap A_2| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Así, pues:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 32 + 128 - 16 = 144$$

Ejemplo 3.7 *¿De cuántas maneras se pueden situar ocho torres en un tablero de ajedrez, de modo que ninguna sea amenazada por otra?*

Resolución: Una torre sólo se mueve horizontal y verticalmente (ver figura). Entonces, en cada fila y en cada columna sólo se puede colocar una torre. En la primera columna se puede situar una torre de 8 maneras distintas. En la segunda columna de 7 maneras, ya que hay una fila amenazada por la primera torre, y así sucesivamente. Según la regla del producto, hay $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ *formas de situar las torres sobre el tablero.*



Otra forma de resolver el problema será considerando las 8^2 *casillas del tablero. Podemos situar una torre de* 8^2 *formas sobre el tablero. Excluyendo su fila y su columna, quedan* 7^2 *formas de situar la segunda torre, y así sucesivamente. En total, habrá* $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$ *formas de situar las ocho torres.*

¿Por qué se obtienen resultados distintos?

Porque se han resuelto dos problemas distintos. En el primer caso, las torres son indistinguibles, son torres idénticas. En el segundo caso, son torres distintas. Por ejemplo, numeradas de 1 a 8.

Ejemplo 3.8 *Un campeonato de liga está formado por cuatro equipos: Tenerife, Barcelona, Real Madrid y Deportivo. Haz un calendario de competición con primera y segunda vuelta. ¿Cuántos partidos son en total?. ¿Y si el total de equipos es de 20?.*

Resolución: Un calendario podría ser:

Primera vuelta	*Segunda vuelta*
Jornada 1	*Jornada 4*
Tenerife-Barcelona	*Barcelona-Tenerife*
Real Madrid-Deportivo	*Deportivo-Real Madrid*
Jornada 2	*Jornada 5*
Barcelona-Real Madrid	*Real Madrid-Barcelona*
Deportivo-Tenerife	*Tenerife-Deportivo*
Jornada 3	*Jornada 6*
Tenerife-Real Madrid	*Real Madrid-Tenerife*
Barcelona-Deportivo	*Deportivo-Barcelona*

Como son sólo cuatro equipos, cada jornada consta de dos partidos. Por la misma razón, la primera vuelta tiene tres jornadas y un equipo tendrá que jugar dos jornadas seguidas como equipo local y otras dos como equipo visitante. En este caso es el Barcelona.

Si el número de equipos es de 20, en cada jornada se celebrarán 10 encuentros. Como cada equipo tiene que enfrentarse a los 19 restantes, la primera vuelta tendrá un total de 19 jornadas y la liga tendrá un total de 38 jornadas.

3.1.1 Principio de distribución de Dirichlet

Este es otro principio básico, que solemos aplicar utilizando el sentido común. También se conoce con el nombre de *principio del palomar*. Imaginemos 11 palomas introduciéndose en los 10 nidos de un palomar. Está claro que al menos dos de las palomas han de meterse en un mismo nido. Si el número de palomas es igual a 21, está claro que al menos tres de las palomas se meterán en un mismo nido.

En general, si queremos distribuir n objetos en k casillas ($n > k$), habrá alguna casilla con al menos $\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$ objetos. El símbolo $[x]$ significa "parte entera de x".

En efecto, si tenemos 11 palomas (n=11) y 10 nidos (k=10), en algún nido habrá al menos $\left[\frac{11-1}{10}\right]+1=1+1=2$ palomas.

Si son 21 palomas y 10 los nidos, en algún nido habrá al menos $\left[\frac{21-1}{10}\right]+1=2+1=3$ palomas.

Un principio tan sencillo puede ayudarnos a resolver problemas de apariencia complicada. Conservando el lenguaje colombófilo, la dificultad suele estar en identificar los "nidos" y las "palomas". Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.9 *Demostrar que en un grupo de 367 personas, al menos dos de ellas tienen la misma fecha de cumpleaños.*

Resolución: Aquí, los 365 dias del año (ó 366 si es bisiesto) son los "nidos" y las 367 personas, las "palomas". Por tanto, al menos $\left[\frac{367-1}{365}\right]+1=1+1=2$ *personas tienen la misma fecha de cumpleaños.*

Ejemplo 3.10 *¿Cuántos alumnos debe haber en una clase para garantizar que por lo menos dos alumnos reciban la misma calificación, sabiendo que las puntuaciones de los exámenes se hacen entre cero y diez, con una única cifra decimal?.*

Resolución: En este caso, las posibles calificaciones (nidos) son

$$\{0, 0.1, 0.2, ..., 1, 1.1, 1.2, ..., 9.9, 10\}$$

cuyo cardinal es 101. *Los n alumnos (palomas) han de verificar*

$$\left[\frac{n-1}{101}\right]+1 \geq 2 \Rightarrow \left[\frac{n-1}{101}\right] \geq 1 \Rightarrow n \geq 102$$

Para que al menos dos alumnos tengan la misma nota, debe haber como mínimo 102 *estudiantes.*

Ejemplo 3.11 *¿Cuál es el tamaño mínimo de una población para que exista al menos un día del año (de 365 días) en el que coincidan las fechas de cumpleaños de al menos 9 personas?*

Resolución: En este caso, el número de personas será el valor de n más pequeño que cumpla:

$$\left[\frac{n-1}{365}\right]+1 \geq 9 \Rightarrow \left[\frac{n-1}{365}\right] \geq 8 \Rightarrow n-1=8\cdot 365=2920 \Rightarrow n=2921 \text{ personas}$$

Ejemplo 3.12 *Demostrar que si lanzamos dos dados 12 veces, al menos en dos de esos lanzamientos obtendremos la misma suma de puntos.*

Resolución: En este caso, las 11 posibles puntuaciones suma

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

son los "nidos" y las 12 lanzamientos las "palomas". Por tanto, se obtendrá al menos $\left[\frac{12-1}{11}\right]+1=2$ *veces la misma puntuación suma.*

Ejemplo 3.13 *Demostrar que en cualquier conjunto de 8 números enteros existen al menos dos números* a *y* b *tales que* $a-b$ *es múltiplo de 7.*

Resolución: El resto de la división de un número entre 7 es uno de los siete números enteros entre 0 y 6. Por tanto, si tenemos un conjunto de 8 números, al menos dos de ellos, a y b, tienen el mismo resto r al dividirlos por 7. Esto es:

$$a = 7 \cdot q + r, \text{ con } 0 \leq r \leq 6$$

$$b = 7 \cdot q' + r, \text{ con } 0 \leq r \leq 6$$

Por tanto, $a - b = 7 \cdot (q - q')$ *es múltiplo de 7.*

Ejemplo 3.14 *Demostrar que una línea recta no puede cortar a los tres lados de un triángulo.*

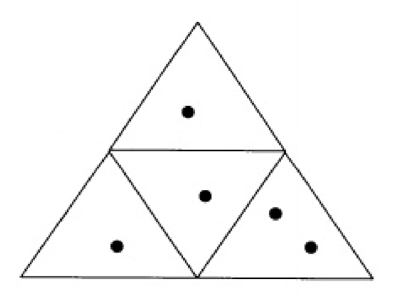
Resolución: En este caso, los "nidos" son los dos semiplanos que determina dicha línea recta. Los tres vértices del triángulo son las "palomas". Si dos vértices están en uno de los semiplanos, el lado del triángulo que ellos dos determinan no será cortado por la línea recta.

Si la línea recta no pasa por ningún vértice, por el principio de Dirichlet, hay al menos dos puntos en alguno de los dos semiplanos (tal vez los tres) y, por tanto, ese lado del triángulo que determinan no será cortado por la línea recta.

Ejemplo 3.15 *Si tenemos 5 puntos dentro de un triángulo equilátero de lado igual a 2 unidades, la distancia entre al menos dos de ellos es menor o igual que 1.*

Resolución: En este caso, los 5 puntos son las "palomas". Los "nidos" son los 4 triángulos equiláteros de lado 1 formados uniendo los puntos medios de los lados del triángulo (ver figura).

Por el principio de Dirichlet, como son 5 puntos, en uno de los 4 triángulos habrá al menos dos puntos, que son los buscados.



Ejemplo 3.16 *De entre 5 puntos del plano con coordenadas enteras, hay al menos dos de ellos cuyo punto medio también tiene coordenadas enteras.*

Resolución: El punto medio de dos puntos (a,b) y (c,d) es igual a $(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2})$. *Si a y c tienen la misma paridad, la primera coordenada será par. Análogamente, la segunda coordenada.*

Podemos dividir a los puntos de coordenadas enteras en cuatro "nidos": (P,P), (P,I), (I,P) e (I,I), donde (P,P) es la "nido" de puntos con ambas coordenadas pares,

(P,I) es la "nido" de puntos con la primera coordenada par y la segunda coordenada impar, etc.

Por el principio de Dirichlet, al menos dos puntos estarán en uno de los 4 "nidos", por lo que tendrán la primera coordenada de igual paridad y lo mismo la segunda coordenada. Por tanto, las coordenadas de su punto medio serán enteras.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Nació en Düren (Alemania) en 1805 y murió en Göttingen en 1859. Fue alumno de Gauss en la universidad de Göttingen. Sus contribuciones más importantes son en la Teoría de Números, Análisis y Mecánica. Fue profesor en las universidades de Breslau, Berlín y Göttingen, en la que sucedió a Gauss. En 1837 introdujo el concepto de función con la notación y=f(x), en la que la variable "y" queda determinada unívocamente por el valor de "x".

3.1.2 Principio de inclusión-exclusión

También se llama *principio de la criba* y es una generalización del cardinal de la unión de dos conjuntos (sección 2.1.1) :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

El nombre de *principio de inclusión-exclusión* proviene de que primero hemos incluido elementos de más en $|A| + |B|$, para luego excluirlos en $|A \cap B|$.

Ejemplo 3.17 *En un club hay 10 personas que juegan al tenis, 15 personas que juegan al squash y 6 personas que practican ambos deportes. ¿Cuántas personas practican al menos uno de los dos deportes?*

Resolución: Sean A y B los conjuntos de las personas que juegan al tenis y al squash, respectivamente. Entonces, las personas que practican al menos uno de los dos deportes son en total:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 10 + 15 - 6 = 19$$

Para tres conjuntos será (sección 2.1.1):

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \left| \bigcap_{i=1}^{3} A_i \right|$$

En general, para n conjuntos:

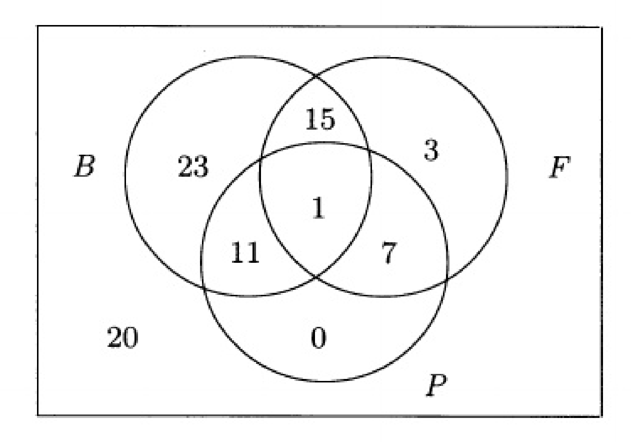
$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ \dots \ + (-1)^{n-1} \left| \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \right|$$

Ejemplo 3.18 *En una clase hay 80 alumnos. De éstos, 50 saben programar en BASIC, 26 en FORTRAN y 19 en PASCAL, 16 en BASIC y FORTRAN, 12 en BASIC y PASCAL, 8 en FORTRAN y PASCAL, mientras que solamente un alumno sabe programar en los tres lenguajes. ¿Cuántos alumnos programan al menos en un lenguaje?. ¿Cuántos no saben programar en ninguno de los tres lenguajes?.*

Resolución: Si B, F y P son los conjuntos respectivos de alumnos que saben programar en BASIC, FORTRAN y PASCAL, tenemos que:

$$|B \cup F \cup P| = |B| + |F| + |P| - |B \cap F| - |B \cap P| - |F \cap P| + |B \cup F \cup P| =$$

$$= 50 + 26 + 19 - 16 - 12 - 8 + 1 = 60 \textit{ alumnos}$$



No saben programar en ninguno de los tres lenguajes: $80 - 60 = 20$ *alumnos.*

3.1.3 Tablas y relaciones de recurrencia

Muchos problemas de recuento pueden resolverse mediante relaciones, llamadas *de recurrencia*, entre los términos de una sucesión de números, que nos permiten hallar un término cualquiera en función del término o los términos anteriores. En muchas ocasiones es útil la confección de una tabla que nos permita generalizar los resultados obtenidos en situaciones sencillas. A continuación, vamos a ver algunos ejemplos en los que mediante una tabla podemos obtener la solución de un modo fácil.

Ejemplo 3.19 *¿De cuántas maneras se puede leer la palabra COMBINATORIA en la figura?*

C
O O
M M M
B B B B
I I I I I
N N N N N N
A A A A A A A
T T T T T T T T
O O O O O O O O O
R R R R R R R R R R
I I I I I I I I I I I
A A A A A A A A A A A A

Resolución: Las dos primeras letras CO se pueden leer de dos maneras distintas:

C
O O

Las tres primeras letras COM se pueden leer de $2^2 = 4$ *maneras distintas:*

C
O O
M M M

Las cuatro primeras letras COMB se pueden leer de $2^3 = 8$ *maneras distintas:*

C
O O
M M M
B B B B

Las cinco primeras letras COMBI se pueden leer de $2^4 = 16$ *maneras distintas:*

C
O O
M M M
B B B B
I I I I I

Podemos construir una tabla:

letras	1	2	3	4	5
maneras	1	2	4	8	16

Observamos que el número de maneras es igual a 2^{n-1}*, ya que* $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$. *Para el total de la palabra COMBINATORIA serán* $2^{11} = 2048$ *maneras.*

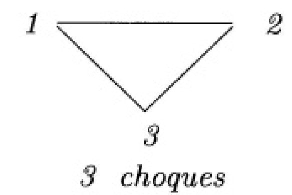
Ejemplo 3.20 *A una reunión asisten 8 personas. Para brindar, todos chocan la copas entre sí. ¿Cuántas choques de copas se producen?*

Resolución: Una estrategia puede ser reducir el número de personas a dos:

1 ———— *2*

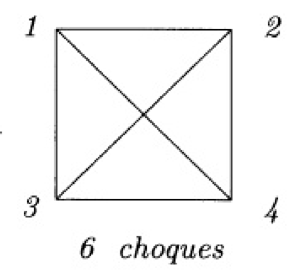
1 choque

Si en lugar de dos personas, fuesen tres:



3 choques

Si fuesen cuatro personas:

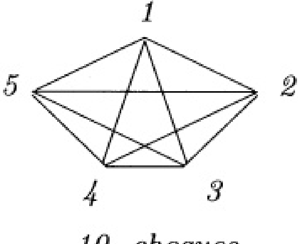


6 choques

Podemos construir una tabla:

personas	1	2	3	4
choques	0	1	3	6

Observamos que la diferencia entre el número de choques aumenta en 1 al añadir una persona: 0+1=1, 1+2=3, 3+3=6. Para 5 personas sería 6+4=10. Lo comprobamos:



10 choques

Generalizando:

personas	1	2	3	4	5	6	7	8
choques	0	1	3	6	10	15	21	28

La respuesta es 28.

Otra forma de hacerlo sería considerando que la primera persona ha brindado con las otras 7, la segunda con las 6 restantes, ... y la penúltima ha brindado sólo con la última. En total: 7+6+5+4+3+2+1=28.

Para n personas sería:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+3+2+1$$

que es la suma de los $n-1$ *primeros términos de una progresión aritmética de diferencia igual a 1:*

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+3+2+1=\frac{n-1+1}{2}\,(n-1)=\frac{n^2-n}{2}$$

Vamos a demostrarlo por inducción. Suponemos que la fórmula es cierta para $n=k$*:*

$$\frac{k^2-k}{2}$$

es preciso demostrarla para $n=k+1$*:*

$$\frac{(k+1)^2-(k+1)}{2}=\frac{k^2+k}{2}$$

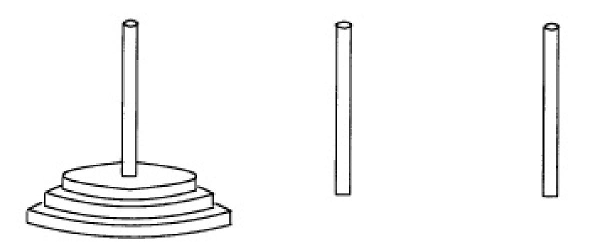
En efecto, k personas realizan $\frac{k^2-k}{2}$ *brindis, por la hipótesis de inducción. Al añadir una persona más, esta persona brinda con las k anteriores y el número de brindis aumenta en k:*

$$\frac{k^2-k}{2}+k=\frac{k^2-k+2k}{2}=\frac{k^2+k}{2}$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo 3.21 *En 1883, el matemático francés Edouard Lucas propuso el siguiente problema. En el gran templo de Benares, bajo la cúpula que indica el centro del mundo, hay un plato de latón con tres agujas de diamante, cada una de un codo de altura (45 a 56 cm.) y de grueso algo menor que un centímetro. En una de estas agujas, durante la creación del mundo, Dios colocó 64 discos de oro puro, el de mayor diámetro descansando sobre el plato de latón y los restantes disminuyendo de tamaño hasta alcanzar el extremo superior de la aguja. Esta es la llamada Torre de Bramah. (Probablemente, en la actualidad lo único que quede en dicho templo sea el plato de latón). Día y noche, incesantemente, los monjes intercambian los discos de oro de una aguja a otra siguiendo las fijas e inmutables leyes de Bramah, que indican que no se puede mover mas de un disco a la vez y que no se puede colocar encima de otro disco de menor tamaño. Cuando los 64 discos hayan sido llevados desde la aguja en que Dios los colocó a otra de las dos agujas restantes, será el fin del mundo. ¿Cuántos movimientos serán precisos para cambiar los 64 discos de una aguja a otra?.*

Resolución: Para simplificar, vamos a considerar únicamente 3 discos.



Movemos el disco pequeño a la tercera aguja y el segundo disco a la segunda aguja. A continuación, movemos el disco pequeño a la segunda aguja. Movemos el disco grande a la tercera aguja y repetimos el proceso con los dos discos pequeños para llevarlos a la tercera aguja, sobre el disco grande. En total han sido necesarios 7 movimientos.

Podemos hacer una tabla, donde n es el número de discos:

n	1	2	3	4
movimientos	1	3	7	15

Como vemos, el número de movimientos es igual a las sucesivas potencias de 2 disminuidas en una unidad: $2^n - 1$.

Vamos a verificarlo mediante el método de inducción. Suponemos que es cierto para $n = k$: $2^k - 1$. *Habrá que demostrarlo para* $n = k + 1$: $2^{k+1} - 1$.

En efecto, si tenemos $k + 1$ *discos en la primera aguja, podemos considerar dicha torre de discos como un primer disco grande con* k *discos encima. Para cambiar de lugar los* k *discos, serán necesarios* $2^k - 1$ *movimientos, por la hipótesis de inducción. A continuación movemos el disco grande a la aguja vacía y, por último, trasladamos los* k *discos sobre él. En total:*

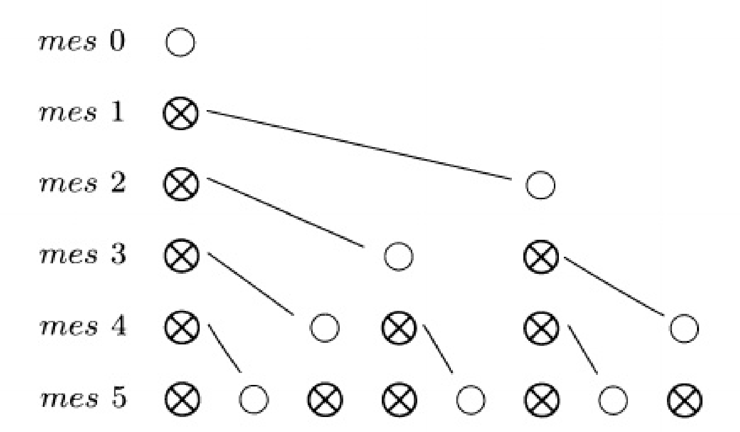
$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

como queríamos demostrar.

En total, serán necesarios $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ *movimientos. Suponiendo que se tarde un segundo en realizar un movimiento, supondría un total de* 584942417355 *años.*

Ejemplo 3.22 *En su Liber Abaci, Fibonacci propone el siguiente problema. Una pareja de conejos recién nacidos (uno de cada sexo) se suelta en una isla. Los conejos no pueden tener descendencia hasta que cumplen 2 meses. Una vez que han cumplido los dos meses, cada pareja tiene otra pareja de conejos cada mes. ¿Cuántas parejas de conejos habrá en la isla transcurridos* n *meses, suponiendo que no muere ningún conejo?*

Resolución: Si representamos la pareja de conejos inmaduros con un círculo blanco y la de maduros por un círculo con aspa, podemos visualizar las primeras generaciones de conejos:



Contando los círculos, se obtiene la sucesión:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$$

llamada sucesión de Fibonacci y que verifica:

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1), \text{ con } f(0) = 1, \ f(1) = 1$$

Nos planteamos ahora si será posible obtener una fórmula para $f(n+1)$, sin tener que calcular previamente $f(n)$, $f(n-1)$, ...

Podemos escribir en forma matricial (consultar un texto de Álgebra Lineal, por ejemplo, Strang [26]):

$$\begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizamos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. El polinomio característico $\lambda^2 - \lambda - 1$ tiene las raíces $(1+\sqrt{5}\,)/2$ y $(1-\sqrt{5}\,)/2$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix}$$

Multiplicando, podemos obtener $f(n)$ de la segunda fila:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.1 *Un edificio tiene 14 puertas. ¿De cuántas formas una persona podrá entrar en el edificio y salir por una puerta diferente de la que utilizó para entrar?*

Resolución: Tiene 14 posibilidades para entrar y, evidentemente, una menos para salir. Por tanto, existen $14 \cdot 13 = 182$ *posibilidades.*

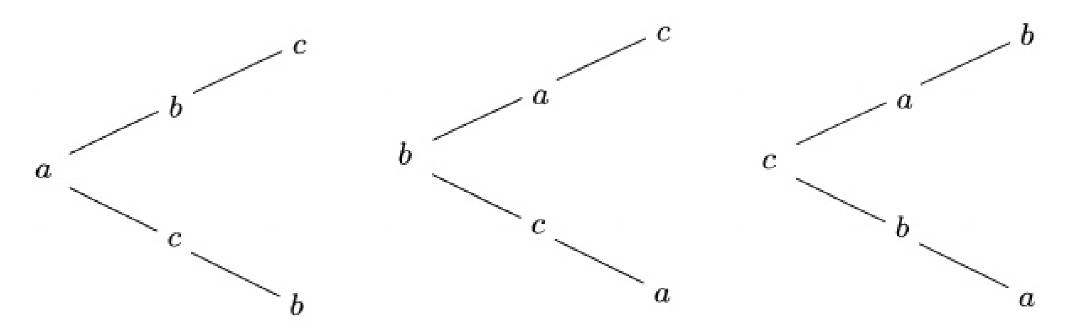
Ejercicio 3.2 *De una baraja española de 40 cartas se toman tres cartas una tras otra. ¿Cuántas son las secuencias de resultados posibles si las tres cartas se toman: a) con reposición, b) sin reposición?*

Resolución: a) Para la primera carta hay 40 posibilidades. Lo mismo para la segunda carta ya que la primera carta extraída ha sido devuelta a la baraja. Análogamente para la tercera carta. Por tanto, el total de posibilidades es $40 \cdot 40 \cdot 40 = 64000$.

b) Si las cartas no son devueltas a la baraja, para la primera carta hay 40 posibilidades, 39 para la segunda y 38 para la tercera. En total $40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$ *posibilidades.*

Ejercicio 3.3 *Tres corredores participan en una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta?*

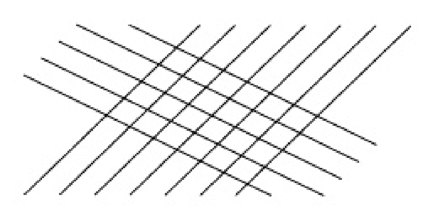
Resolución: Si designamos a los corredores por a, b y c, pueden llegar a la meta de las siguientes maneras: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Son 6 maneras en total. Para el primer puesto hay 3 posibilidades: a, b ó c. Para el segundo puesto, una vez adjudicado el primer puesto, hay 2 posibilidades. Por tanto, para los dos primeros puestos hay $3 \cdot 2 = 6$ *maneras de llegar a la meta. Por último, para el tercer puesto sólo queda una manera. En total,* $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. *Utilizando un diagrama de árbol:*



Ejercicio 3.4 *En una ciudad A, los números telefónicos se forman con 4 números (de cero a nueve) no pudiendo ser cero el primero de ellos. En otra ciudad B, se forman con 5 cifras de igual manera.¿Cuántas llamadas entre números telefónicos distintos pueden hacerse entre las ciudades A y B?*

Resolución: El total de números de la ciudad A es igual a $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ *y el de la ciudad B es igual a* $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$. *El número posible de llamadas entre las dos ciudades A y B es* $9000 \cdot 90000 = 810000000$.

Ejercicio 3.5 *¿Cuántos paralelogramos determinan un grupo de 7 rectas paralelas al ser intersecadas por otro grupo de 5 rectas paralelas? ¿y un grupo de m rectas paralelas al ser intersecadas por n rectas paralelas?*



Resolución: De un modo inmediato, $6 \cdot 4 = 24$ *paralelogramos. En general, un grupo de m rectas paralelas al intersecar a otro grupo de n rectas paralelas, determinan* $(m-1)(n-1)$ *paralelogramos.*

Ejercicio 3.6 *¿Cuántos números de seis cifras son capicúas?*

Resolución: Un número capicúa de seis cifras tiene la forma abccba, con $a \neq 0$*. Consideramos sólo las tres primeras cifras abc. Para la primera cifra hay 9 posibilidades, 10 para la segunda y 10 para la tercera. En total:*

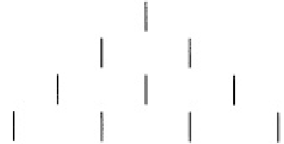
$$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$$

Ejercicio 3.7 *¿Cuántos números de cinco cifras hay en el sistema de numeración de base 4?*

Resolución: En el sistema de numeración de base cuatro, sólo aparecen los dígitos 0, 1, 2 y 3. Como la primera cifra de un número no puede ser cero, se tienen, en total:

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 768 \textit{ números}$$

Ejercicio 3.8 *El juego del Dernier* [1] *(o Nim) se juega con 10 palitos, dispuestos en cuatro filas, como muestra la figura. Dos jugadores toman palitos alternativamente, pudiendo tomar desde un palito hasta todas los de una fila, pero nunca de dos filas diferentes. Pierde aquel jugador que se vea obligado a tomar el último palito. Buscar estrategias ganadoras.*



El que comienza el juego gana siempre. ¿De qué forma?. Jugar de nuevo con 15 palitos dispuestos en cinco filas.

Resolución: El jugador que comienza gana siempre tomando los cuatro palitos de la última fila.

[1] Último, en francés

Ejercicio 3.9 *Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes habrá que imprimir si cada uno lleva impresas las estaciones de origen y destino?.*

Resolución: Habrá que imprimir en cada billete la estación de origen (25 en total) y la de destino (24 en total). Por tanto, según el principio del producto, será necesario imprimir $25 \cdot 24 = 600$ *billetes diferentes.*

Ejercicio 3.10 *¿Cuántos divisores tiene el número 10800?*

Resolución: En primer lugar, descomponemos en factores primos dicho número, $10800 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$*. Entonces, los divisores del número 10800 tienen la forma* $2^x \times 3^y \times 5^z$*, con* $0 \leq x \leq 4$*,* $0 \leq y \leq 3$*,* $0 \leq z \leq 2$*. Por el principio del producto, el total de divisores será* $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Ejercicio 3.11 *Demostrar que en un grupo de 28 palabras, al menos dos de ellas comienzan con la misma letra.*

Resolución: Siguiendo el principio de Dirichlet (sección 3.1.1), las palabras son las "palomas" y las 27 letras del alfabeto, los "nidos". Habrá al menos $\left[\frac{28-1}{27}\right]+1 = 1+1 = 2$ *palabras que comiencen con la misma letra.*

Ejercicio 3.12 *En un conjunto de 100 personas, ¿cuántas, como mínimo, nacieron el mismo mes del año?*

Resolución: En este caso, las $n = 100$ *personas son las "palomas", y los "nidos" son los* $k = 12$ *meses del año. Por tanto, por el principio de Dirichlet:*

$$[100/12] + 1 = 8 + 1 = 9 \ personas$$

Ejercicio 3.13 *¿Cuál es el número mínimo de alumnos necesario para que al menos 6 tengan la misma calificación en un examen, sabiendo que hay 4 posibles calificaciones: suspenso, aprobado, notable y sobresaliente?*

Resolución: En este caso, el número de alumnos será el valor de n más pequeño que cumpla:

$$[\frac{n-1}{4}] + 1 \geq 6 \Rightarrow [\frac{n-1}{4}] \geq 5 \Rightarrow n - 1 = 20 \Rightarrow n = 21 \ alumnos$$

Ejercicio 3.14 *A una reunión asisten n personas. Las que se conocen con anterioridad, se saludan dándose la mano. Demostrar que al menos dos de los asistentes han saludado al mismo número de personas.*

Resolución: Utilizaremos el principio del palomar. Uno cualquiera de los asistentes habrá saludado entre 0 y n-1 personas. Consideremos n "nidos" numerados de 0 a n-1 y hagamos que cada persona (paloma) escriba su nombre en un papel y lo introduzca en el nido cuyo número corresponde al número de saludos que realizó.

Tenemos n asistentes y n nidos (numerados de 0 a n-1), de modo que no podemos asegurar por el principio del palomar que hay un nido con más de un papel, ya que puede suceder que haya en cada nido exactamente un papel. Pero entonces habrá una

persona que introdujo el papel en el nido numerado con 0 y otra en el nido numerado con n-1, lo que implica que esta última persona ha saludado a las n-1 restantes, incluida la anterior persona, que no saludó a nadie ya que introdujo su papel en el nido 0, lo que es una contradicción. Por tanto, al menos dos personas realizaron el mismo número de saludos.

Ejercicio 3.15 *¿Cuántas sucesiones de n dígitos se pueden formar con los elementos* $\{0, 1, 2\}$, *que posean al menos un 0, un 1 y un 2?*

Resolución:

Total de sucesiones de n dígitos: $VR_{3,n} = 3^n$
Total de sucesiones de n dígitos que no poseen 0: $VR_{2,n} = 2^n$
Total de sucesiones de n dígitos que no poseen 1: $VR_{2,n} = 2^n$
Total de sucesiones de n dígitos que no poseen 2: $VR_{2,n} = 2^n$
Total de sucesiones de n dígitos que no poseen 0 ni 1: 1
Total de sucesiones de n dígitos que no poseen 0 ni 2: 1
Total de sucesiones de n dígitos que no poseen 1 ni 2: 1

Por el principio de inclusión-exclusión:

$$3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1 + 1 + 1 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

Ejercicio 3.16 *Sea E un alfabeto con 5 vocales y 21 consonantes. ¿Cuántas palabras de 5 letras pueden formarse con las letras de E, tales que la primera y la última letras sean vocales distintas y las otras tres sean consonantes distintas?*

Resolución: Para la primera letra hay 5 posibilidades. Para la última restan 4 posibilidades, una vez colocada la primera letra. Para las tres letras centrales (consonantes) hay $21 \cdot 20 \cdot 19$ *posibilidades. En total:*

$$5 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 4 = 159600$$

Ejercicio 3.17 *¿Cuántas permutaciones del conjunto de números* $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ *satisfacen la condición de que en la primera posición y en la última haya un múltiplo de 3?*

Resolución: Para la primera cifra hay 3 posibilidades: 3, 6 y 9. Para la última restan 2 posibilidades, una vez colocada la primera cifra. Para las cuatro cifras centrales hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ *posibilidades. En total:*

$$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 144$$

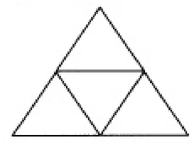
Ejercicio 3.18 *En una carrera deportiva participan cinco equipos de cuatro corredores cada uno. Para contabilizar el resultado se tiene en cuenta sólo los tres primeros clasificados. ¿Cuántos resultados son posibles, con la condición de que los tres corredores sean de equipos distintos?*

Resolución: Para la primera plaza hay $4 \cdot 5 = 20$ *posibilidades. Para la segunda plaza hay* $4 \cdot 4 = 16$ *posibilidades, ya que no puede quedar segundo otro corredor del equipo ganador. Para la tercera plaza hay* $4 \cdot 3 = 12$ *posibilidades, ya que ha de ser de distinto equipo que los dos primeros. En total:*

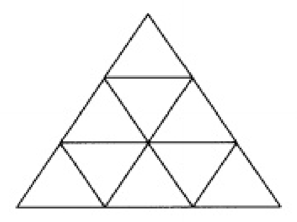
$$20 \cdot 16 \cdot 12 = 3840$$

Ejercicio 3.19 *En un triángulo equilátero de lado 1, hay un solo triángulo equilátero de lado 1:*

En un triángulo equilátero de lado 2, hay 4 triángulos equiláteros de lado 1:



En un triángulo equilátero de lado 3, hay 9 triángulos equiláteros de lado 1:

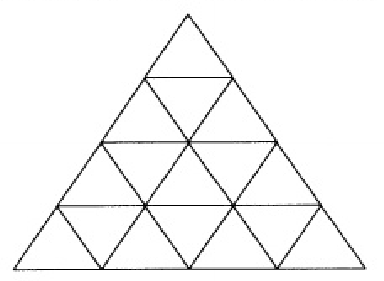


¿Cuántos triángulos equiláteros de lado 1 habrá en un triángulo equilátero de lado 7? ¿Y en uno de lado 100? ¿Y en uno de lado n?

Resolución: Podemos construir una tabla:

lado	1	2	3
triángulos	1	4	9

Observamos que el número de triángulos es igual al cuadrado del lado del triángulo: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$. *Para el triángulo de lado 4 sería* $4^2 = 16$. *Lo comprobamos:*



En un triángulo de lado 7 habrá $7^2 = 49$ *triángulos equiláteros de lado 1. En un triángulo equilátero de lado n habrá* n^2 *triángulos equiláteros de lado 1. En efecto, por el método de inducción, si en un triángulo de lado n hay* n^2 *triángulos de lado 1, en uno de lado n+1 habrá* n^2 *más los* $2(n+1)-1$ *de la última fila n+1:*

$$n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Ejercicio 3.20 *Una persona coloca 6000 euros en un banco al 9% anual. Encontrar una fórmula recurrente para el saldo* P_n *al cabo de n años. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 10 años?*

Resolución: Sea P_n *el saldo de la cuenta transcurridos n años, que será el saldo a los* $n-1$ *años más los intereses del último año.*

$$P_n = P_{n-1} + 0.09\ P_{n-1} = 1.09\ P_{n-1}$$

La condición inicial es $P_0 = 6000$. *De un modo recurrente:*

$$P_1 = 1.09\ P_0$$

$$P_2 = 1.09\ P_1 = (1.09)^2\ P_0$$

....

$$P_n = (1.09)^n\ P_0$$

Por tanto, $P_n = (1.09)^n\ 6000$, *que demostramos por inducción. Es cierta para* $n = 0$, *ya que* $P_0 = 6000$. *Si suponemos que es cierta para* $n = k$: $P_k = (1.09)^k\ 6000$, *tenemos que:*

$$P_{k+1} = 1.09\ P_k = 1.09\ (1.09)^k\ 6000 = (1.09)^{k+1}\ 6000$$

Por último, para $n = 10$, $P_{10} = (1.09)^{10}\ 6000 = 14204.18$ *euros.*

Capítulo 4

Variaciones y combinaciones

Si tenemos un conjunto de n elementos, de los que queremos seleccionar una muestra de tamaño k, hemos de hacernos dos preguntas previas: ¿la muestra es ordenada? ¿los elementos pueden repetirse?

Las $2 \times 2 = 4$ posibles respuestas dan lugar a los cuatro conceptos básicos de la Combinatoria: Variaciones, Variaciones con repetición, Combinaciones y Combinaciones con repetición.

4.1 Variaciones

Dado un conjunto de cardinal n, nos planteamos cuántas agrupaciones distintas de k elementos $(k \leq n)$ podremos formar con dichos n elementos, teniendo en cuenta que una agrupación ha de diferenciarse de otra al menos en un elemento o en el orden de colocación de sus elementos. A continuación, vamos a introducir el concepto de variaciones mediante un ejemplo sencillo.

Ejemplo 4.1 *Escribir todas las palabras posibles de dos letras distintas que se pueden formar con las letras de la palabra LIBRO.*

Resolución: Procedemos a escribirlas de forma ordenada en cinco columnas, las que comienzan por L, por I, por B, por R y por O.

Si colocamos en primer lugar la letra L, para la segunda letra hay 4 posibilidades I, B, R y O, que escribimos en la primera columna. Si situamos en primer lugar la letra I, para la segunda letra hay 4 posibilidades L, B, R y O, que colocamos en la segunda columna. Procedemos del mismo modo con las restantes letras y obtenemos en total:

$$\begin{array}{ccccc} LI & IL & BL & RL & OL \\ LB & IB & BI & RI & OI \\ LR & IR & BR & RB & OB \\ LO & IO & BO & RO & OR \end{array}$$

Son en total 20 palabras. En efecto, para la primera letra hay 5 posibilidades: L, I, B, R y O. Para la segunda letra hay únicamente 4 posibilidades ya que, una vez colocada la primera letra, sólo quedan 4 letras. Por lo tanto, habrá en total $5 \cdot 4 = 20$ *palabras de dos letras.*

Se representa $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$ *y se lee "variaciones de 5 elementos de orden 2".*

Podemos considerar las variaciones anteriores como el número de aplicaciones inyectivas (ver sección 2.2) entre los conjuntos $A = \{1, 2\}$ *y* $B = \{L, I, B, R, O\}$*. En la figura aparece representada la aplicación correspondiente a la palabra LI:*

Cada palabra de dos letras corresponde a una aplicación inyectiva de A en B.

Ejemplo 4.2 *Repetir el problema anterior buscando todas la palabras posibles de tres letras distintas en vez de dos.*

Resolución: Si procedemos como en el ejemplo anterior y seguimos el mismo proceso constructivo:

LIB	*ILB*	*BLI*	*RLI*	*OLI*
LIR	*ILR*	*BLR*	*RLB*	*OLB*
LIO	*ILO*	*BLO*	*RLO*	*OLR*
LBI	*IBL*	*BIL*	*RIL*	*OIL*
LBR	*IBR*	*BIR*	*RIB*	*OIB*
LBO	*IBO*	*BIO*	*RIO*	*OIR*
LRI	*IRL*	*BRL*	*RBL*	*OBL*
LRB	*IRB*	*BRI*	*RBI*	*OBI*
LRO	*IRO*	*BRO*	*RBO*	*OBR*
LOI	*IOL*	*BOL*	*ROL*	*ORL*
LOB	*IOB*	*BOI*	*ROI*	*ORI*
LOR	*IOR*	*BOR*	*ROB*	*ORB*

En efecto, para la primera letra hay 5 posibilidades, 4 para la segunda y sólo 3 para la tercera. Son en total $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ *palabras de tres letras.*

Se representa $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ *y se lee "variaciones de 5 elementos de orden 3", que corresponden al número de aplicaciones inyectivas entre los conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{L, I, B, R, O\}$*.*

En general, si tenemos n elementos diferentes, una selección ordenada de k de esos elementos se llama "variaciones de n elementos de orden k" y se representa $V_{n,k}$, siendo:

$$V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)$$

Podemos considerar las variaciones anteriores como el número de aplicaciones inyectivas entre los conjuntos A y B, de cardinales k y n, respectivamente.

Ejemplo 4.3 *Escribir todos los números de dos cifras distintas que se pueden formar con los números 3, 4, 5 y 6. a) ¿Cuántos son? ¿Por qué? b) ¿Cuántos de ellos son pares? c) ¿Cuántos son múltiplos de 5? d) ¿Cuántos son mayores que 60? e) ¿Cuánto suman todos los números del apartado a)?*

Resolución: Se escriben en cuatro columnas: los que comienzan por 3, por 4, por 5 y por 6:

34	43	53	63
35	45	54	64
36	46	56	65

a) Son en total 12 números. En efecto, para la primera cifra hay 4 posibilidades: 3, 4, 5 ó 6. Para la segunda letra hay únicamente 3 posibilidades ya que, una vez colocada la primera cifra, sólo quedan 3 cifras. En total: $4 \cdot 3 = 12$. *Esto es,* $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$.

b) Dividiendo el total de números entre el número de cifras: 12/4=3. Tenemos que 3 números terminan en 3, 3 en 4, 3 en 5 y 3 en 6. Los números pares serán los que tengan por última cifra 4 ó 6. En total: 3+3=6.

c) Los múltiplos de 5 serán los que tengan 5 por última cifra, esto es, 3 números.

d) Serán mayores que 60 los que tengan 6 de primera cifra. En total, 3 números.

e) Un número cualquiera, por ejemplo, 758, representa 7 centenas, 5 decenas y 8 unidades, esto es, $758 = 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8$.

Del total de 12 números del apartado a), 3 comienzan por 3, 3 comienzan por 4, 3 por 5 y 3 por 6. Si los colocamos en columna para sumar, la suma de la columna de las decenas será $3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6$, *igual que la columna de las unidades. La suma total:*

$$10(3\cdot3+3\cdot4+3\cdot5+3\cdot6)+(3\cdot3+3\cdot4+3\cdot5+3\cdot6) = (10+1)(3\cdot3+3\cdot4+3\cdot5+3\cdot6) =$$

$$= 11 \cdot 3 \cdot (3+4+5+6) = 594$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 35 \\ 36 \\ 43 \\ 45 \\ 46 \\ 53 \\ 54 \\ 56 \\ 63 \\ 64 \\ 65 \\ \hline 594 \end{array}$$

Ejemplo 4.4 *¿De cuántas formas se pueden distribuir 2 objetos diferentes en 4 recipientes diferentes, si no se puede colocar más de un objeto en cada recipiente?*

Resolución: Sea $\{a_1, a_2\}$ *el conjunto de los 2 objetos y* $\{1, 2, 3, 4\}$ *el conjunto de los 4 recipientes. Consideremos una de estas formas, por ejemplo la que corresponde a colocar el objeto* a_1 *en el recipiente* 1, *el objeto* a_2 *en el recipiente* 3 *y dejar vacíos los recipientes* 2 *y* 4. *La configuración que le corresponde es* 13. *Por tanto, cada forma de distribuir los dos objetos es una aplicación inyectiva del conjunto* $\{a_1, a_2\}$ *con 2 elementos en el conjunto* $\{1, 2, 3, 4\}$ *con 4 elementos y, por tanto, el número total es* $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$. *Las 12 posibilidades son:*

12	31
13	32
14	34
21	41
23	42
24	43

En general, si tenemos k objetos diferentes, podemos distribuirlos en n recipientes diferentes (sin colocar más de un objeto en cada recipiente) de $V_{n,k}$ formas.

Los siguientes problemas son equivalentes:

a) El número de variaciones de n elementos de orden k.

b) El número de aplicaciones inyectivas de un conjunto con k elementos en un conjunto con n elementos.

c) El número de formas de distribuir k objetos diferentes en n recipientes diferentes, no colocando más de un objeto en cada recipiente.

Este número común es $V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)$.

4.1.1 Permutaciones

A las variaciones de n elementos de orden n se les designa con el nombre de *permutaciones* y se representan P_n ó $n!$, que se lee "factorial de n". Así:

$$V_{n,n} = P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

que corresponden a las aplicaciones biyectivas (ver sección 2.2) entre los conjuntos A y B, de igual cardinal n.

Ejemplo 4.5 *a) Escribir como cociente de números factoriales las siguientes expresiones:*

1) $11 \cdot 10 \cdot 9$
2) $(x+1) \cdot x \cdot (x-1)$
3) $(n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)$

Resolución:

$$1)\ \frac{11!}{10!}$$
$$2)\ \frac{(x+1)!}{(x-2)!}$$
$$3)\frac{(n-2)!}{(n-5)!}$$

b) Comprobar que $P_{n-1} = P_n - (n-1)P_{n-1}$.

Resolución: Hay que probar que

$$(n-1)! = n! - (n-1)\cdot(n-1)!$$

Es inmediato, ya que $n! = n\cdot(n-1)!$. *Por tanto:*

$$(n-1)! = n\cdot(n-1)! - (n-1)\cdot(n-1)!$$
$$(n-1)! = [n-(n-1)]\cdot(n-1)!$$
$$(n-1)! = (n-1)!$$

c) Resolver la ecuación: $12\cdot x! + 5\cdot(x+1)! = (x+2)!$.

Resolución: Puesto que $(x+1)! = (x+1)\cdot x!$ *y* $(x+2)! = (x+2)\cdot(x+1)\cdot x!$, *tenemos que:*

$$12\cdot x! + 5\cdot(x+1)\cdot x! = (x+2)\cdot(x+1)\cdot x!$$

Simplificando $x!$ *en los dos miembros:*

$$12 + 5\cdot(x+1) = (x+2)\cdot(x+1)$$
$$12 + 5x + 5 = x^2 + 3x + 2$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$x = 5$$

Ejemplo 4.6 *Escribir todas las palabras posibles de cuatro letras distintas que se pueden formar con las letras de la palabra ROMA.*

Resolución: Las escribimos en cuatro columnas, las que comienzan por R, por O, por M y por A:

ROMA	*ORMA*	*MROA*	*AROM*
ROAM	*ORAM*	*MRAO*	*ARMO*
RMOA	*OMRA*	*MORA*	*AORM*
RMAO	*OMAR*	*MOAR*	*AOMR*
RAOM	*OARM*	*MARO*	*AMRO*
RAMO	*OAMR*	*MAOR*	*AMOR*

Son en total 24 palabras. En efecto, para la primera letra hay 4 posibilidades: R, O, M y A. Para la segunda letra hay únicamente 3 posibilidades ya que, una vez

colocada la primera letra, sólo quedan 3 letras. Por lo tanto, habrá en total $4 \cdot 3 = 12$ *posibilidades para las dos primeras letras. Del mismo modo, para la tercera letra hay 2 posibilidades, una vez colocadas las dos primeras. Para la última letra hay una sola posibilidad. Por lo tanto, habrá en total* $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ *posibilidades para las cuatro letras.*

Se representa $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Podemos considerar las permutaciones anteriores como el número de aplicaciones biyectivas (sección 2.2) entre los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $B = \{R, O, M, A\}$. *En la figura aparece representada la aplicación correspondiente a la palabra ROMA:*

Cada palabra de cuatro letras corresponde a una aplicación biyectiva de A en B.

Los siguientes problemas son equivalentes:

a) El número de permutaciones de n elementos.

b) El número de aplicaciones biyectivas entre dos conjuntos de cardinal n.

c) El número de distribuciones de n objetos diferentes en n recipientes diferentes, colocando un objeto en cada recipiente.

Este número común es $V_{n,n} = P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

En la siguiente tabla se dan los 10 primeros valores del factorial de n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Por convenio, se toma $0! = 1$.

Los valores de $n!$ crecen con gran rapidez. Por ello, los valores grandes de $n!$ se pueden obtener con la fórmula aproximada:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

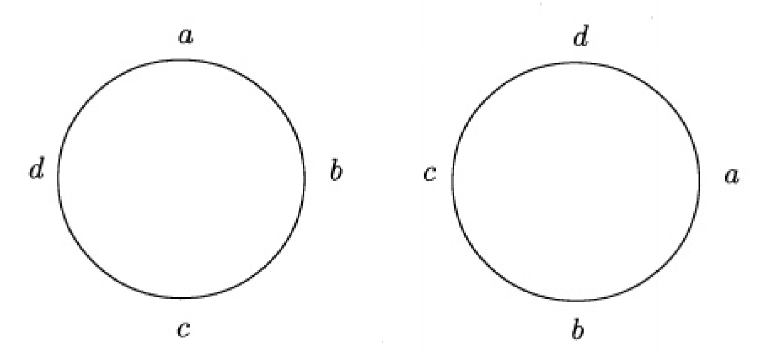
llamada *fórmula de Stirling*.

4.1.2 Permutaciones circulares

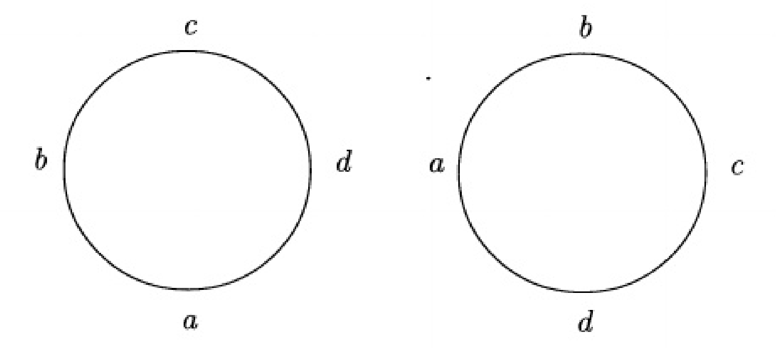
Supongamos que queremos saber de cuántas maneras pueden sentarse un conjunto de personas alrededor de una mesa circular, teniendo en cuenta que dos permutaciones son iguales si se puede obtener una a partir de otra mediante un giro de las personas alrededor de la mesa.

Ejemplo 4.7 *¿De cuántas formas pueden sentarse cuatro personas alrededor de una mesa circular?*

Resolución: Por tratarse de una mesa circular, las dos posiciones de la figura son la misma:



La permutación de la derecha se ha obtenido girando 90, en el sentido de las agujas del reloj, las personas de la izquierda. La posición relativa entre ellas no ha cambiado, corresponden a la misma permutación. Además, existen otras dos permutaciones idénticas a las anteriores:



Estas cuatro permutaciones se conocen con el nombre de permutaciones circulares. *Tenemos que:*

$$4 \times \textit{total permutaciones circulares} = \textit{total permutaciones simples} = P_4 = 4! = 24$$

Por tanto, el total de permutaciones circulares es igual a:

$$\frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

En general, el número de *permutaciones circulares* de un conjunto de n elementos es igual a $(n-1)!$.

4.1.3 Variaciones con repetición

Al igual que hicimos con las variaciones, vamos a introducir las variaciones con repetición mediante un ejemplo sencillo.

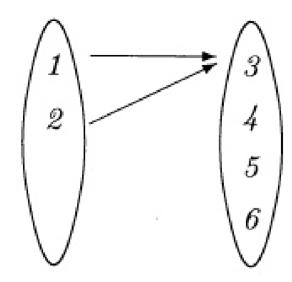
Ejemplo 4.8 *Escribir todos los números de dos cifras que se pueden formar con los números 3, 4, 5 y 6, pudiendo repetirse las cifras. ¿Cuántos son? ¿Por qué?*

Resolución: Para la primera cifra hay 4 posibilidades: 3, 4, 5 ó 6. Para la segunda cifra hay otras 4 posibilidades, ya que las cifras se pueden repetir. En total, para las dos primeras cifras hay $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ *posibilidades, que son:*

33	43	53	63
34	44	54	64
35	45	55	65
36	46	56	66

Se representa $VR_{4,2} = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ *y se lee "variaciones con repetición" de 4 elementos de orden 2.*

Podemos considerar las variaciones con repetición anteriores como el número de aplicaciones (sección 2.2) entre los conjuntos $A = \{1, 2\}$ *y* $B = \{3, 4, 5, 6\}$. *En la figura aparece representada la aplicación correspondiente al número 33:*



Cada número de dos cifras corresponde a una aplicación (inyectiva o no) de A *en* B.

En general, si tenemos n elementos diferentes, una selección ordenada de k de esos elementos, permitiendo repeticiones, se llama "variaciones con repetición de n elementos de orden k" y se representa $VR_{n,k}$, siendo:

$$VR_{n,k} = n \cdot n \overset{(k)}{\ldots\ldots} n = n^k$$

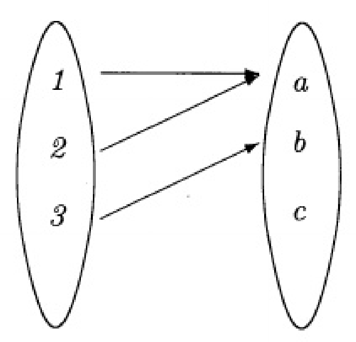
Podemos considerar las variaciones con repetición anteriores como el número de aplicaciones entre los conjuntos A y B, de cardinales k y n, respectivamente.

Ejemplo 4.9 *¿De cuántas formas pueden perseguir 3 perros a 3 gatos?.*

Resolución: Si llamamos $A = \{1, 2, 3\}$ *al conjunto de perros y* $B = \{a, b, c\}$ *al conjunto de gatos, la solución será el total de aplicaciones entre los conjuntos* A *y* B:

$$VR_{3,3} = 3^3 = 27$$

En la figura aparece representada la persecución aab:



En total serán:

aaa	*baa*	*caa*
aab	*bab*	*cab*
aac	*bac*	*cac*
aba	*bba*	*cba*
abb	*bbb*	*cbb*
abc	*bbc*	*cbc*
aca	*bca*	*cca*
acb	*bcb*	*cbc*
acc	*bcc*	*ccc*

Cada conjunto de tres letras corresponde a una aplicación (inyectiva o no, exhaustiva o no) de A en B.

Ejemplo 4.10 *¿Cuántas distribuciones se pueden hacer con 2 objetos diferentes en 3 recipientes diferentes, pudiendo colocar más de un objeto en cada caja?*

Resolución: Sea $\{a_1, a_2\}$ el conjunto de los 2 objetos y $\{1, 2, 3\}$ el conjunto de los 3 recipientes. Consideremos una de estas distribuciones, por ejemplo la que corresponde a colocar el objeto a_1 en el recipiente 1, el objeto a_2 en el recipiente 3, quedando vacío el recipiente 2. La configuración que corresponde a esta distribución es 13. Por tanto, cada distribución es una aplicación (inyectiva o no) del conjunto $\{a_1, a_2\}$ con 2 elementos en el conjunto $\{1, 2, 3\}$ con 3 elementos y, por tanto, el número de distribuciones es $VR_{3,2} = 3^2 = 9$. Las 9 distribuciones son:

11	21	31
12	22	32
13	23	33

En general, si tenemos k objetos diferentes, podemos distribuirlos en n recipientes diferentes (pudiendo colocar más de un objeto en cada caja) de $VR_{n,k} = n^k$ formas.

Los siguientes problemas son equivalentes:

a) El número de variaciones con repetición de n elementos de orden k.

b) El número de aplicaciones de un conjunto con k elementos a un conjunto con n elementos.

c) El número de distribuciones de k objetos diferentes en n recipientes diferentes, con la posibilidad de colocar más de un objeto en algún recipiente o dejar algún recipiente vacío.

Este número común es $VR_{n,k} = n^k$.

Ejemplo 4.11 *Un sistema de matriculación de automóviles consiste en un número de cuatro cifras seguido de dos letras (que pueden ser iguales). Suponiendo que se utilizan 25 letras, ¿cuántos automóviles pueden matricularse con este sistema?*

Otro sistema consiste en 4 cifras seguido de 3 letras (sin vocales). ¿Cuántos automóviles podrán matricularse con este sistema?

Proponer sistemas de matriculación alternativos.

2875 AN **7105 BFS**

Resolución: Con el primer sistema: $VR_{10,4} \cdot VR_{25,2} = 10^4 \cdot 25^2 = 6.250.000$

Con el segundo sistema, para todo el país podrán matricularse:

$$VR_{10,4} \cdot VR_{20,3} = 10^4 \cdot 20^3 = 80.000.000$$

4.2 Combinaciones

Dado un conjunto A con n elementos, nos planteamos cuántos subconjuntos de k elementos posee. A cada uno de estos subconjuntos lo llamaremos *combinación* de n elementos de orden k y el número de estas combinaciones lo denotaremos por $C_{n,k}$.

Ejemplo 4.12 *Escribir todos los subconjuntos posibles de 2 letras del conjunto* $\{L, I, B, R, O\}$.

Resolución: Con la letra L, podemos formar los subconjuntos de 2 letras: LI, LB, LR y LO. Con la letra I, podemos formar los subconjuntos de 2 letras: IB, IR e IO, ya que los subconjuntos LI e IL son el mismo. En total, tenemos los 10 subconjuntos de 2 elementos siguientes:

$$\begin{array}{llll} LI & IB & BR & RO \\ LB & IR & BO & \\ LR & IO & & \\ LO & & & \end{array}$$

Son en total 10 subconjuntos de dos letras. Por tanto, $C_{5,2} = 10$. *Observamos que si permutamos entre sí los elementos de cada subconjunto, obtenemos las variaciones de orden 2 de los 5 elementos:*

$$\begin{array}{lllll} LI & IL & BL & RL & OL \\ LB & IB & BI & RI & OI \\ LR & IR & BR & RB & OB \\ LO & IO & BO & RO & OR \end{array}$$

Por tanto:

$$C_{5,2} \cdot P_2 = V_{5,2} \Rightarrow C_{5,2} = \frac{V_{5,2}}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

En general, si en las combinaciones de n elementos de orden k, permutamos los k elementos obtenemos las variaciones de n elementos de orden k, es decir

$$C_{n,k} \cdot P_k = V_{n,k}$$

y, por tanto:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}{k!}$$

Ejemplo 4.13 *Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, hallar los subconjuntos con cada uno de los cardinales posibles.*

Resolución: Subconjuntos de cardinal cero, $C_{5,0} = 1$:

$$\emptyset$$

Subconjuntos de cardinal uno, $C_{5,1} = \frac{V_{5,1}}{1!} = 5$:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$$

Subconjuntos de cardinal dos, $C_{5,2} = \frac{V_{5,2}}{2!} = 10$:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}$$

$$\{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}$$

$$\{3,4\}, \{3,5\}$$

$$\{3,5\}$$

Subconjuntos de cardinal tres, $C_{5,3} = \frac{V_{5,3}}{3!} = 10$:

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, , \{1,2,5\}$$

$$\{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}$$

$$\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}$$

$$\{3,4,5\}$$

Subconjuntos de cardinal cuatro, $C_{5,4} = \frac{V_{5,4}}{4!} = 5$:

$$\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}$$

$$\{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}$$

Subconjuntos de cardinal cinco, $C_{5,5} = \frac{V_{5,5}}{5!} = 1$:

$$\{1,2,3,4,5\}$$

Ejemplo 4.14 *Se tiene un grupo de 8 personas. ¿Cuántos grupos de 3 personas se pueden formar? ¿Y de 4 personas?.*

Resolución: Procediendo como antes, se halla $V_{8,3} = 8.7.6 = 336$*. Pero hemos considerado que el grupo formado por la primera, segunda y tercera personas, por ejemplo, es distinto del formado por esas mismas personas cambiando el orden, lo cual es falso. Para proceder correctamente, hemos de dividir por las permutaciones de esas 3 personas entre sí:*

$$C_{8,3} = \frac{V_{8,3}}{P_3} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = \frac{336}{6} = 56$$

Grupos de 4 personas:

$$C_{8,4} = \frac{V_{8,4}}{P_4} = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = \frac{1680}{24} = 70$$

Al multiplicar por $(n-k)!$ el numerador y denominador de la expresión que proporciona $C_{n,k}$, obtenemos:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$$

que nos da una nueva forma de calcular las combinaciones de n elementos de orden k:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$$

A los números obtenidos de $C_{n,k}$ los llamamos *números combinatorios* y los representamos por

$$\binom{n}{k}$$

donde n se llama *numerador* o *índice* y k se llama *orden* del número combinatorio.

Los números combinatorios tienen las siguientes propiedades:

1. $\binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{1} = n$
3. $\binom{n}{n} = 1$
4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propiedad de complementación)
5. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (fórmula de Pascal)

En efecto:

1. Un conjunto con n elementos posee un subconjunto con cero elementos, que es el conjunto vacío $\emptyset$, por tanto:

$$\binom{n}{0} = 1$$

2. Un conjunto con n elementos posee n subconjuntos con un elemento cada uno, que son los conjuntos unitarios, por tanto:

$$\binom{n}{1} = n$$

3. Un conjunto con n elementos posee un subconjunto con n elementos, que es él mismo, por tanto:

$$\binom{n}{n} = 1$$

4. Dado un conjunto con n elementos, todo subconjunto de él con k elementos tiene un complementario con $n-k$ elementos y viceversa. En consecuencia, el número de subconjuntos con k elementos es el mismo que el de subconjuntos con $n-k$ elementos y, por tanto, se verifica:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

5. Dado un conjunto $U = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ con n elementos, elegimos un elemento a_n y clasificamos los $\binom{n}{k}$ subconjuntos con k elementos en dos clases: a) los que contienen dicho elemento a_n; b) los que no contienen a_n. Veamos cuántos subconjuntos hay de tipo a) y cuántos hay de tipo b).

a) Para los subconjuntos que contienen a_n, el problema es elegir $k-1$ elementos de entre los $n-1$ restantes, y esto se puede hacer de $\binom{n-1}{k-1}$ maneras.

b) Para obtener un subconjunto de k elementos donde no esté a_n, deben seleccionarse k elementos de entre los restantes $k-1$, y esto puede hacerse de $\binom{n-1}{k}$ maneras.

Por tanto, la suma de las dos clases da:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Otra forma de demostrar la fórmula sería:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)\cdot(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k\cdot(k-1)!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left[\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right] =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k-1)!}\left[\frac{k+n-k}{k(n-k)}\right] = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k-1)!}\left[\frac{n}{k\,(n-k)}\right] =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)!}{k(k-1)!\cdot(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Ejemplo 4.15 *Calcular a)* $\binom{4}{2}$; *b)* $\binom{6}{4}$.

a) $$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 4$$

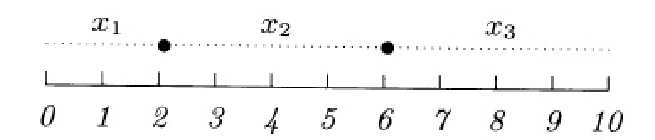
b) $$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!\,4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

Ejemplo 4.16 *¿De cuántas maneras se pueden distribuir 3 objetos idénticos en 4 recipientes diferentes de modo que en cada recipiente no haya más de un objeto?.*

Resolución: Llamemos $\{a_1, a_2, a_3\}$ *al conjunto de los 3 objetos y* $\{1, 2, 3, 4\}$ *al conjunto de los 4 recipientes. Consideremos una de estas distribuciones, por ejemplo la que corresponde a colocar el objeto* a_1 *en el recipiente* 1, *el objeto* a_2 *en el recipiente* 2 *y el objeto* a_3 *en el recipiente* 3, *quedando vacío el recipiente 4. La configuración que corresponde a esta distribución es* $a_1a_2a_3-$, *que coincide con* $a_2a_1a_3-$ *pues los objetos son idénticos. Por tanto, el número de distribuciones es* $C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$.

Ejemplo 4.17 *¿Cuántas soluciones enteras positivas (excluido el cero) tiene la ecuación* $x_1 + x_2 + x_3 = 10$*?.*

Resolución: El problema es equivalente al de obtener de cuántas maneras se pueden situar dos puntos sobre las 9 divisiones de un segmento de 10 unidades de longitud:



El gráfico corresponde a la solución particular $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ *y* $x_3 = 4$. *Como el número de subconjuntos de 2 elementos de un conjunto de cardinal 9 es* $C_{9,2} = \binom{9}{2} =$ 36, *éste es el número de soluciones positivas de la ecuación.*

Los siguientes problemas son equivalentes:

a) el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de cardinal n.

b) El número de combinaciones de n elementos de orden k.

c) El número de distribuciones de k objetos idénticos en n recipientes diferentes, de modo que no haya en cada recipiente más de un objeto.

d) El número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1} = n+1$.

Este número común es $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ejemplo 4.18 *¿Cuántas líneas telefónicas se necesitan para comunicar entre sí a 20 abonados?*

Resolución: Para conectar los abonados número 1 y número 2, hace falta una línea telefónica que representamos por 12. Para conectar dos abonados cualquiera x e y, hace falta una línea telefónica que representamos por xy. Por tanto, de lo que se trata es de hacer con los 20 abonados todos los grupos posibles de 2 abonados, esto es

$$C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190 \text{ líneas} \quad .$$

Otra forma de plantear la situación es la siguiente. Para comunicar el abonado número 1 con los 19 restantes, vamos a necesitar 19 líneas telefónicas. Para comunicar el abonado número 2 con los 18 restantes (con el número 1 ya está conectado), necesitaremos 18 líneas telefónicas. Del mismo modo, para comunicar el abonado número 3 con los 17 restantes (con los abonados 1 y 2 ya está conectado), necesitaremos 16 líneas. En total, vamos a necesitar $19+18+17+...+3+2+1$ líneas telefónicas para comunicar entre sí los 20 abonados. Utilizando la fórmula de la suma de una progresión aritmética:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{19+1}{2} \cdot 19 = 190 \text{ líneas}$$

Ejemplo 4.19 *¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?. ¿Qué polígono tiene igual número de diagonales que de lados?*

Resolución: Cada dos vértices a y b del polígono determinan un segmento ab, que puede ser una diagonal o un lado del polígono. Por tanto, las combinaciones de orden 2 de los n lados nos da el total de diagonales, incluidos los n lados, que tendremos que restar:

$$C_{n,2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

Para averiguar qué polígono tiene igual número de diagonales que lados, resolvemos la ecuación

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = n \Rightarrow n^2 - 3n = 2n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n(n-5) = 0 \Rightarrow n = 5$$

Por tanto, el pentágono tiene 5 diagonales.

Ejemplo 4.20 *En un país no hay dos habitantes con igual dentadura. ¿Cuál es el número máximo de habitantes de dicho país?*

Resolución: Si el número de piezas dentales es de 32 y se simboliza con 0 la falta de una pieza y con 1 su existencia, la dentadura de un habitante se puede simbolizar con un arreglo de 32 ceros y unos:

$$01001000111100111010101110001101$$

El número máximo de habitantes será:

$$VR_{2,32} = 2^{32}$$

Otra forma de plantearlo sería considerando que el número de habitantes con 1 diente es $C_{32,1}$, con 2 dientes es $C_{32,2}$, etc. Por tanto, el número máximo de habitantes será:

$$C_{32,0} + C_{32,1} + C_{32,2} + \dots + C_{32,32} =$$
$$= \binom{32}{0} + \binom{32}{1} + \binom{32}{2} + \dots + \binom{32}{32} = (1+1)^{32} = 2^{32}$$

(Ver sección 5.7).

Ejemplo 4.21 *La Lotería Primitiva consta de 49 números, de los que se sortean 6. ¿Cuántos resultados posibles hay en dicho sorteo?. Si una persona juega un boleto múltiple de 8 números, ¿cuántas apuestas sencillas de 6 números está jugando?.*

Resolución: Como no importa el orden de los números, los resultados posibles son las combinaciones de orden 6 de los 49 números:

$$C_{49,6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13983816 \text{ apuestas}$$

Si una persona juega un boleto múltiple de 8 números, dicha persona está jugando:

$$C_{8,6} = \frac{8!}{6!\ 2!} = 28 \text{ apuestas}$$

4.3 Permutaciones con repetición

Se plantean a continuación algunos ejemplos previos a la introducción del concepto de permutaciones con repetición.

Ejemplo 4.22 *Escribir todas las palabras posibles de cuatro letras que se pueden formar con las letras de la palabra CASA.*

Resolución: Este ejercicio es análogo a otros hechos anteriormente con letras distintas (ver ejemplo 4.6). Ahora, en la palabra CASA hay dos letras iguales, por lo que

no serán $4! = 24$ *las palabras posibles sino algunas menos, ya que las permutaciones de los dos letras A entre sí darán lugar a palabras iguales. Dejando sólo las palabras distintas, aparecen:*

$$\begin{array}{llll} CASA & ACAS & ASAC & SCAA \\ CAAS & ACSA & AASC & SACA \\ CSAA & ASCA & AACS & SAAC \end{array}$$

Son 12 en total. En efecto, si las cuatro letras fuesen distintas, el resultado sería $P_4 = 4.3.2.1 = 24$. *Pero como hay dos letras iguales, habrá que dividir por las permutaciones de esas 2 letras que dan lugar a palabras iguales:*

$$\frac{P_4}{P_2} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

Ejemplo 4.23 *Dados los conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *y* $B = \{a, b, c\}$, *¿cuántas aplicaciones sobreyectivas de* A *en* B *hay, de modo que el elemento* $a \in B$ *sea imagen de dos elementos de* A, $b \in B$ *sea imagen de tres elementos de* A *y* $c \in B$ *sea imagen de dos elementos de* A*?.*

Resolución: Una de estas aplicaciones de A en B es la expresada por la sucesión bacbbca. Si distinguimos cada elemento de esta sucesión con un subíndice, se tiene:

$$b_1 a_1 c_1 b_2 b_3 c_2 a_2$$

Permutando las a_i *entre sí, las* b_j *entre sí y también las* c_k *entre sí, obtenemos* $2!3!2!$ *permutaciones. Si esto lo realizamos con todas las aplicaciones suprayectivas, obtenemos:*

$$\frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

En general, las distintas permutaciones de n elementos en los que n_1 son idénticos de un determinado tipo 1, n_2 son idénticos de un determinado tipo 2, ... , n_r son idénticos de un determinado tipo r, reciben el nombre de "permutaciones con repetición" y se simbolizan

$$PR_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{P_n}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \ldots P_{n_r}} = \frac{n!}{n_1! \; n_2! \ldots n_r!}$$

con $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Ejemplo 4.24 *Con las letras de la palabra TAGANANA, ¿cuántas palabras de 8 letras se pueden formar permutándolas entre sí?*

Resolución: La palabra TAGANANA tiene 8 letras, de las que 4 y 2 son iguales (A y N). Por tanto:

$$PR_8^{4,2} = \frac{P_8}{P_1 \cdot P_4 \cdot P_1 \cdot P_2} = \frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2!} = 840$$

4.4 Combinaciones con repetición

Dado un conjunto de n elementos, nos planteamos cuántos multiconjuntos de k elementos posee (ver sección 2.1.2). Al total de multiconjuntos lo llamaremos *combinaciones con repetición de n elementos de orden k* (puede ser $k > n$) y lo denotaremos por $CR_{n,k}$, que es igual a $C_{n+k-1,k}$, es decir:

$$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{n}$$

Vamos a verificarlo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.25 *Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, hallar los multiconjuntos para cada uno de los cardinales posibles.*

Resolución:

Los multiconjuntos de cardinal cero son $CR_{4,0} = C_{4+0-1,0} = C_{4,0} = 1$:

$$\emptyset$$

Los multiconjuntos de cardinal uno son $CR_{4,1} = C_{4+1-1,1} = C_{4,1} = 4$:

$$\}1\{,\ \}2\{,\ \}3\{,\ \}4\{$$

Los multiconjuntos de cardinal dos son $CR_{4,2} = C_{4+2-1,2} = C_{5,2} = 10$:

$$\}1,1\{,\ \}1,2\{,\ \}1,3\{,\ \}1,4\{$$
$$\}2,2\{,\ \}2,3\{,\ \}2,4\{$$
$$\}3,3\{,\ \}3,4\{$$
$$\}4,4\{$$

Los multiconjuntos de cardinal tres son $CR_{4,3} = C_{4+3-1,3} = C_{6,3} = 20$:

$$\}1,1,1\{,\ \}1,1,2\{,\ \}1,1,3\{,\ \}1,1,4\{$$
$$\}1,2,2\{,\ \}1,2,3\{,\ \}1,2,4\{$$
$$\}1,3,3\{,\ \}1,3,4\{$$
$$\}1,4,4\{$$
$$\}2,2,2\{,\ \}2,2,3\{,\ \}2,2,4\{,\ \}2,3,3\{,\ \}2,3,4\{,\ \}2,4,4\{$$
$$\}3,3,3\{,\ \}3,3,4\{,\ \}3,4,4\{$$
$$\}4,4,4\{$$

De forma análoga, se hallan los multiconjuntos de 4 elementos, siendo su número igual a:

$$CR_{4,4} = C_{4+4-1,4} = C_{7,4} = 35$$

Ejemplo 4.26 *En una confitería hay 4 tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 pasteles?*

Resolución: Evidentemente, no importa el orden. Por otra parte, puede elegirse dos o tres pasteles iguales. Si los tipos de pasteles son a, b y c, pueden elegirse:

aaa	*bbb*	*ccc*	*ddd*	*abc*
aab	*bba*	*cca*	*dda*	*abd*
aac	*bbc*	*ccb*	*ddb*	*bcd*
aad	*bbd*	*ccd*	*ddc*	*acd*

Este es el caso de combinaciones con repetición:

$$CR_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \frac{6!}{3!\ 3!} = 20\ formas$$

Ejemplo 4.27 *¿Cuántas distribuciones se puede hacer con 2 objetos idénticos en 3 recipientes diferentes, siendo posible colocar más de un objeto en cada caja?*

Resolución: Sea $\{a_1, a_2\}$ el conjunto de los 2 objetos y $\{1, 2, 3\}$ el conjunto de los 3 recipientes. Consideremos una de estas distribuciones, por ejemplo la que corresponde a colocar el objeto a_1 en el recipiente 1, el objeto a_2 en el recipiente 1, quedando vacío el recipiente 3. La configuración que corresponde a esta distribución es 11. El número de distribuciones coincide con las combinaciones con repetición, $CR_{3,2} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$. Las 6 distribuciones son:

11
12
13
22
23
33

En general, si tenemos k objetos idénticos, podemos distribuirlos en n recipientes diferentes (pudiendo colocar más de un objeto en cada caja) de $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{n}$ formas.

Ejemplo 4.28 *¿Cuántas soluciones enteras positivas (excluido el cero) tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 10$?*

Resolución: Este problema ya fue resuelto con anterioridad (ej. 4.17) de la forma $C_{9,2} = \binom{9}{2} = 36$ soluciones.

Otra forma de resolverlo es utilizando el concepto de combinaciones con repetición, que pueden describirse como la selección de x_i objetos, $i = 1, 2, 3$, donde cada x_i es un número entero positivo:

$$CR_{3,10-3} = CR_{3,7} = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36\ \ soluciones.$$

Los siguientes problemas son equivalentes:

a) Número de combinaciones con repetición de n elementos de orden k.

b) Número de distribuciones de k objetos idénticos en n recipientes diferentes, pudiendo contener cada recipiente más de un objeto.

Este número común es $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

4.5 Cuadro resumen

Al comienzo del capítulo, dado un conjunto de n elementos, nos hacíamos dos preguntas previas acerca de la selección de una muestra de tamaño k: ¿la muestra es ordenada? ¿los elementos pueden repetirse?. Presentamos ahora un cuadro resumen de los casos posibles. A la derecha figuran los tipos de distribuciones de k objetos en n cajas distintas.

		¿Importa el orden?	¿Pueden repetirse?		
Variac.	sin rep.	si	no	$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	Distribuciones de k objetos distintos, no conteniendo cada caja más de un objeto
	con rep.		sí	$VR_{n,k} = n^k$	Distribuciones de k objetos distintos, sin limitaciones
Permut.	sin rep.	si	no	$P_n = n!$	
	con rep.		sí	$PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{n!}{a!\ b!\ c!\ \dots}$	
Combin.	sin rep.	no	no	$C_{n,k} = \binom{n}{k}$	Distribuciones de k objetos idénticos, no conteniendo cada caja más de un objeto
	con rep.		sí	$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$	Distribuciones de k objetos idénticos, sin limitaciones

4.6 Sustituciones

Supongamos que tenemos un conjunto ordenado de n elementos. Si los reemplazamos por ellos mismos pero colocados en otro orden, se dice que hemos efectuado una *sustitución*.

Un conjunto de n elementos admite $P_n = n! = n$ sustituciones.

Por ejemplo, si tenemos el conjunto formado por los 5 elementos 12345, una sustitución será 31254, que simbolizamos:

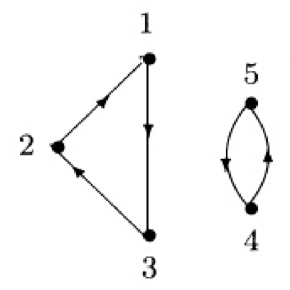
$$\binom{12345}{31254}$$

Podemos considerar la anterior sustitución como una aplicación biyectiva (sección

2.2) que hace corresponder:

$$1 \to 3$$
$$2 \to 1$$
$$3 \to 2$$
$$4 \to 5$$
$$5 \to 4$$

Y podemos representarla mediante un grafo dirigido de 5 vértices y 5 aristas:

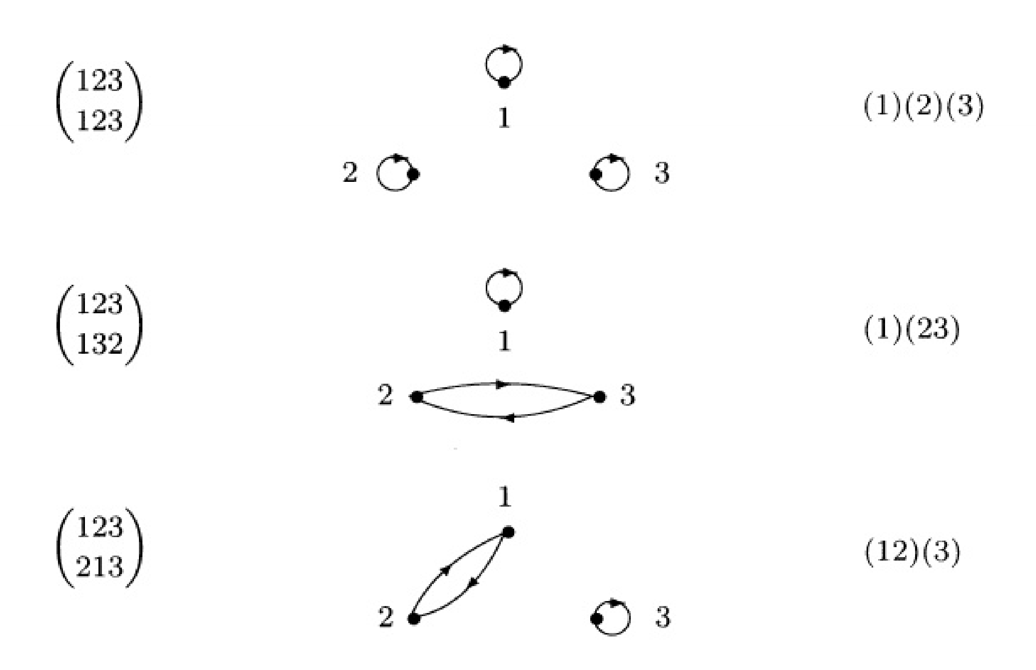


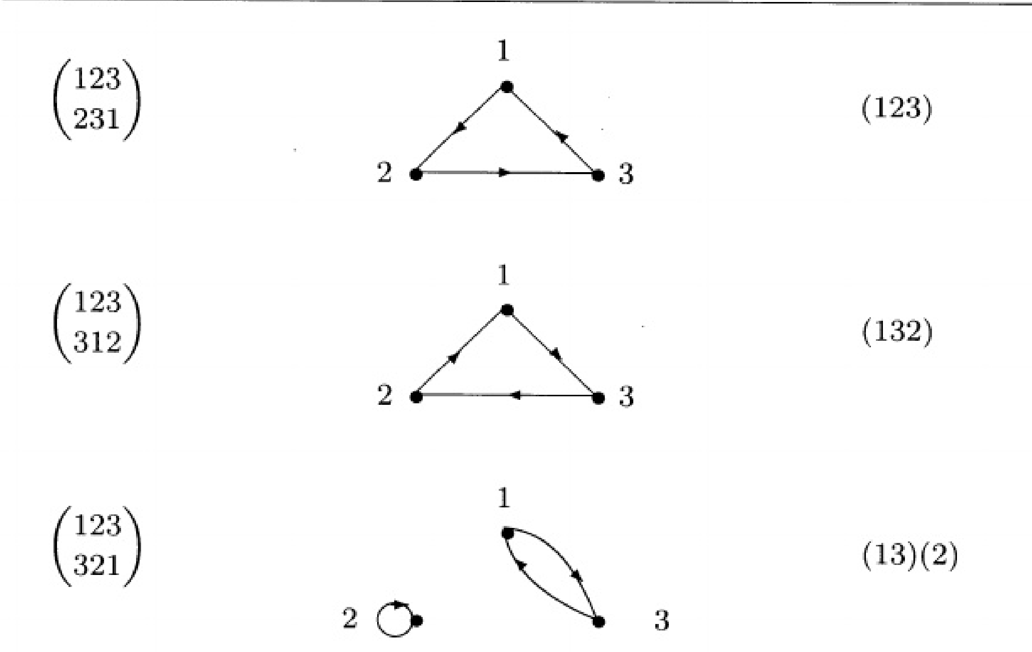
que presenta dos ciclos disjuntos (132) y (45).

Otra forma de representar una sustitución es mediante sus ciclos. Por ejemplo, la sustitución anterior $\binom{12345}{31254}$, la podemos escribir (132)(45).

Ejemplo 4.29 *Representar mediante ciclos disjuntos las 6 sustituciones del conjunto* $\{1, 2, 3\}$.

Resolución: El conjunto de 3 elementos $\{1, 2, 3\}$ *posee* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ *sustituciones que vamos a representar de las tres maneras anteriormente indicadas:*





Nota.- La ordenación interna de cada ciclo es importante, ya que los ciclos (123) y (132) son distintos. Sin embargo, los ciclos (123), (231) y (312) son iguales, ya que $1 \to 2$, $2 \to 3$ y $3 \to 1$ en los tres ciclos. El orden de los ciclos entre sí carece de importancia. Por ejemplo, (132)(45)=(45)(132). Por otra parte, al escribir una sustitución, los ciclos suele omitirse cuando su longitud o periodo es igual a 1, por ejemplo, (32)(456)(1) = (32)(456).

4.6.1 Producto de dos sustituciones

Si a los elementos de un conjunto ordenado les aplicamos dos sustituciones sucesivas S_1 y S_2, obtenemos una nueva sustitución $S_3 = S_1 \cdot S_2$, llamada *sustitución producto*, cuyo efecto es el mismo que al aplicar S_1 y S_2 sucesivamente.

Ejemplo 4.30 *Multiplicar* $S_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$ *y* $S_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$.

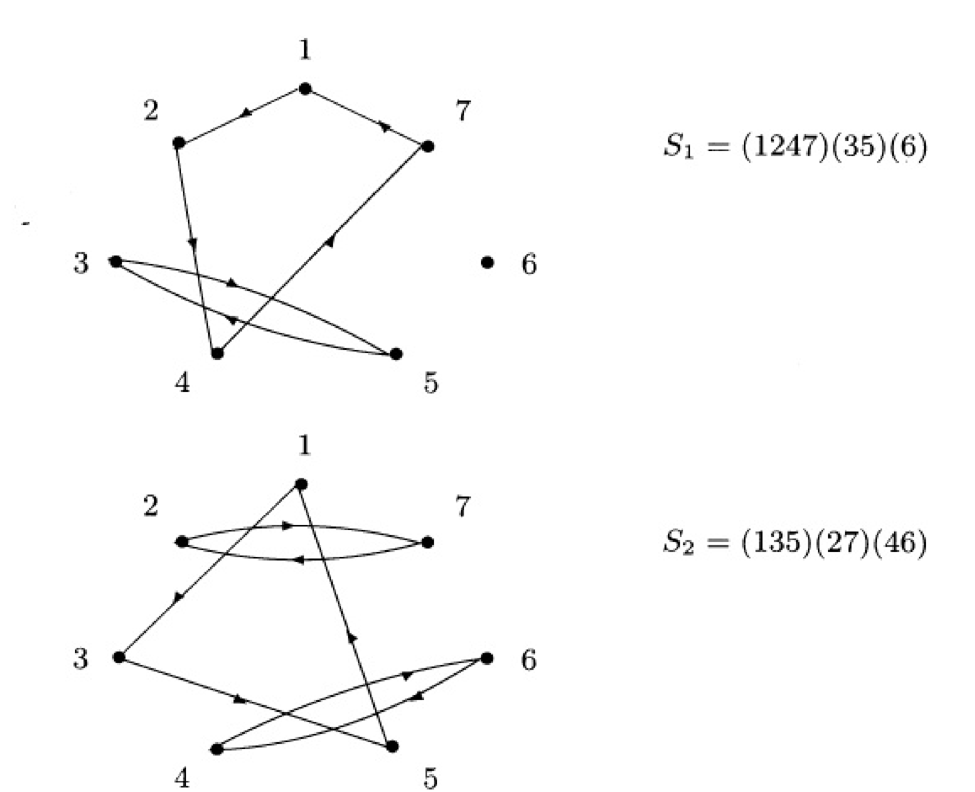
Resolución: La aplicación de S_1 *al conjunto ordenado 123 produce el conjunto ordenado 213. La aplicación de* S_2 *lleva el elemento 2 al elemento 3, el elemento 1 al 2 y el elemento 3 al 1. Por tanto:*

$$S_1 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$$

El producto de dos sustituciones también puede realizarse cuando las sustituciones vienen dadas mediante ciclos, como podemos ver en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.31 *Multiplicar* $S_1 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 2457361 \end{pmatrix}$ *y* $S_2 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3756142 \end{pmatrix}$.

Resolución: La sustituciones S_1 *y* S_2 *en forma de ciclos:*



Su producto:

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_1 & & P_2 & & \\ 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 7 & & \\ 7 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 3 & & (731) \\ 3 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 1 & & \\ & & & & & & \\ 2 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 6 & & \\ 6 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 4 & & (642) \\ 4 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 2 & & \\ & & & & & & \\ 5 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 5 & & (5) \end{array}$$

El producto es igual a $(731)(642)(5)$. *Es fácil de comprobar:*

$$S_1 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 2457361 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3756142 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7612543 \end{pmatrix} = (731)(642)(5)$$

4.6.2 El grupo de las sustituciones

Sea G el conjunto de las sustituciones de un conjunto S de cardinal n. La multiplicación de sustituciones posee las siguientes propiedades:

1. Es interna. En efecto, al multiplicar dos sustituciones S_1 y S_2 se obtiene otra sustitución S_3.

2. Asociativa. Dadas tres sustituciones cualquiera S_1, S_2 y S_3, se verifica:

$$S_1 \cdot (S_2 \cdot S_3) = (S_1 \cdot S_2) \cdot S_3$$

3. Posee elemento neutro I. La sustitución identidad I es aquella que no altera el orden de los elementos de un conjunto ordenado. Para toda sustitución S, se verifica $I \cdot S = S \cdot I = S$.

4. Toda sustitución S posee una sustitución inversa S^{-1}, que verifica $S \cdot S^{-1} = S^{-1} \cdot S = I$.

Por cumplir las cuatro propiedades anteriores, se dice que el par formado por el conjunto de las sustituciones G con la multiplicación anteriormente definida, tiene estructura de *grupo*, llamado *grupo de la sustituciones de grado n*.

4.6.3 Números de Stirling de primera especie

Los números de Stirling de primera especie, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, también conocidos como *ciclos de Stirling*, nos dan el número de permutaciones de n objetos distintos que contienen exactamente k ciclos (a dos ciclos con direcciones opuestas los consideramos diferentes).

Por ejemplo, las 6 permutaciones de los números 1, 2 y 3, se clasifican:

1 ciclo	*2 ciclos*	*3 ciclos*
(123)	(12)(3)	(1)(2)(3)
(132)	(13)(2)	
	(23)(1)	
$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$

Y los números 1, 2, 3 y 4, pueden permutarse en 1, 2, 3 o 4 ciclos de las siguientes maneras:

1 ciclo	*2 ciclos*	*3 ciclos*	*4 ciclos*
(1234)	(123)(4)	(1)(2)(34)	(1)(2)(3)(4)
(1243)	(132)(4)	(12)(3)(4)	
(2134)	(124)(3)	(13)(2)(4)	
(2143)	(142)(3)	(14)(2)(3)	
(1324)	(134)(2)	(24)(1)(3)	
(3142)	(143)(2)	(23)(1)(4)	
	(12)(34)		
	(13)(24)		
	(14)(23)		
	(1)(234)		
	(1)(243)		
$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 1$

Por otra parte, cumplen la propiedad:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}, \quad k \leq n$$

Los numeros de Stirling de primera especie $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, podemos resumirlos en la tabla:

n												$n!$
1						1						1
2					1		1					2
3				2		3		1				6
4			6		11		6		1			24
5		24		50		35		10		1		120
6	120		274		225		85		15		1	720

Los números de Stirling de primera especie se relacionan con los factoriales mediante la fórmula:

$$n! = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

4.6.4 Desordenaciones

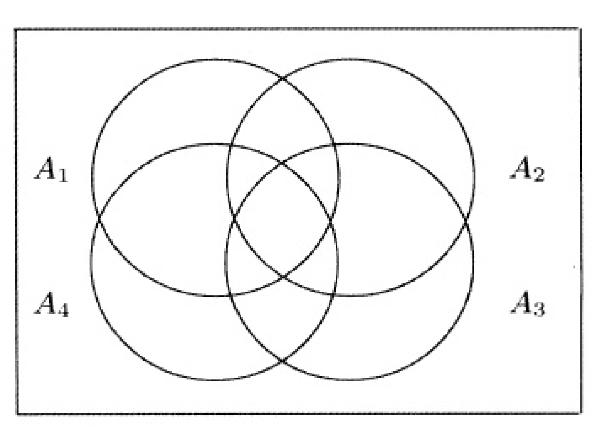
Una sustitución de los números 1,2,3, ..., n se llama *desordenación* cuando ninguno de ellos queda en su lugar original. Por ejemplo, 2413 es una desordenación, sin embargo, 1423 no lo es, ya que el 1 está en su lugar original.

Para hallar el total de desordenaciones de un conjunto de números se utiliza el principio de inclusión-exclusión (sección 2.1.1). Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.32 *Hallar el número de desordenaciones de 1, 2, 3, 4.*

Resolución: Sea A_i el conjunto de las sustituciones de 1, 2, 3, 4, tal que el elemento i ocupa el lugar i.

Al total de sustituciones $P_4 = 4! = 24$, habrá que restarle el cardinal de $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.



Es decir, el número de desordenaciones será:

$$4! - \Big(\sum_{i=1}^{4}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le 4}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le 4}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \Big|\bigcap_{i=1}^{4}A_i\Big|\Big)$$

Calculando por separado cada uno de los sumandos:

$$\sum_{i=1}^{4}|A_i| = |A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4| = 4\cdot(4-1)! = 4!$$

$$\sum_{i\le i<j\le 4}|A_i\cap A_j| = |A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4| =$$

$$= \binom{4}{2}\cdot(4-2)! = \frac{4!}{2!}$$

ya que están fijos en su lugar 2 elementos y hay $\binom{4}{2} = 6$ *pares de intersecciones* $A_i\cap A_j$.

$$\sum_{i\le i<j<k\le 4}|A_i\cap A_j\cap A_k| = |A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_4| =$$

$$= \binom{4}{3}\cdot(4-3)! = \frac{4!}{3!}$$

ya que están fijos en su lugar 3 elementos y hay $\binom{4}{3} = 4$ *ternas de intersecciones* $A_i\cap A_j\cap A_k$.

El último sumando:

$$\Big|\bigcap_{i=1}^{4}\Big| = |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| = \binom{4}{4}\cdot(4-4)! = \frac{4!}{4!}$$

Por tanto, el total de desordenaciones viene dado por:

$$4! - \Big(4! - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!}\Big) = 4!\Big(\frac{1!}{2!} - \frac{1!}{3!} + \frac{1!}{4!}\Big) = 24\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\Big) = 9$$

Los 9 desordenaciones son:

2143	3142	4123
2341	3412	4312
2413	3412	4321

En general, si tenemos n elementos 1, 2, 3, ..., n, y llamamos A_i al conjunto de sustituciones de 1, 2, 3, ..., n, tales que el elemento i ocupa el lugar i, $i \in \{1,2,3,...,n\}$, entonces del total de las sustituciones $n!$ de los n elementos tenemos que restar el cardinal de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n$.

Por el principio de inclusión-exclusión:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ \dots \ + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| = |A_1| + |A_2| + \ \dots \ + |A_n| = n \cdot (n-1)! = n!$$

ya que son n conjuntos en los que hay 1 elemento en su lugar.

Por otra parte:

$$\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!}$$

ya que hay $\binom{n}{2}$ intersecciones $A_i \cap A_j$ con 2 elementos en su lugar.

Asimismo:

$$\sum_{i \leq j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{n}{3}(n-3)! = \frac{n!}{3!}$$

....

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \binom{n}{n}(n-n)! = \frac{n!}{n!}$$

Por tanto, el total de desordenaciones viene dado por:

$$n! - \left(n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \ \dots \ + (-1)^n \frac{n!}{n!}\right) = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ \dots \ + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Ejemplo 4.33 *Un jugador apuesta que cada uno de los 6 caballos de una carrera llegará a la meta según los pronósticos. ¿De cuántas maneras podrán llegar a la meta de modo que el jugador pierda todas sus apuestas?*

Resolución: Si numeramos los caballos de 1 a 6, queremos saber el número de formas en las que podemos colocar dichos 6 números de modo que el 1 no esté en primer lugar, el 2 no esté en segundo lugar, ... y el 6 no esté en último lugar, es decir, hemos de calcular el número de desordenaciones de 1, 2, 3, 4, 5, 6:

$$6! - \left(6! - \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{3!} - \frac{6!}{4!} + \frac{6!}{5!} - \frac{6!}{6!}\right) = 6!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = 265 \ maneras$$

Recordemos el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función e^x (Franco [11]):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Tomando $x = -1$:

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ ...$$

Con cinco cifras decimales, $e^{-1} = 0.36786$ y $-1+1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+ \ ... \ -\frac{1}{7!} = 0.36786$. Por tanto, si $k > 7$, e^{-1} es una buena aproximación para $\sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!}$. Vemos otro uso en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.34 *¿De cuántas formas puede un profesor de Literatura distribuir 30 libros entre sus alumnos (un libro por alumno) y después recogerlos y volverlos a repartir de modo que cada alumno lea dos libros distintos?*

Resolución: La respuesta es el número de desordenaciones de 30 números 1, 2, 3, ... , 30:

$$30! - \left(30! - \frac{30!}{2!} + \frac{30!}{3!} - \ ... \ - \frac{30!}{30!}\right) = 30!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ ... \ + \frac{1}{30!}\right) = \frac{30!}{e} \ \textit{maneras}$$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.1 *Resolver la ecuación* $C_{x,x-2} = 10$.

Resolución:

$$\frac{x!}{(x-2)!\ 2!} = 10 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} = 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x-1) = 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Ejercicio 4.2 *Resolver la ecuación* $V_{x+1,2} - V_{x,2} = 6$.

Resolución:

$$(x+1)x - x(x-1) = 6 \Rightarrow x^2 + x - x^2 + x = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Ejercicio 4.3 *Resolver la ecuación* $C_{x+1,2} + P_2 = V_{x,2}$.

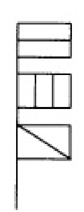
Resolución:

$$\frac{(x+1)x}{2} + 2 = x(x-1) \Rightarrow x^2 + x + 2 = x(x-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Ejercicio 4.4 *¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila tres personas? ¿Y cuatro personas?*

Resolución: Tres personas en fila se pueden colocar de $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ *maneras. Del mismo modo, cuatro personas se pueden colocar de* $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ *maneras.*

Ejercicio 4.5 *Un barco dispone de ocho banderas distintas. ¿Cuántas señales puede mostrar si cada señal consiste en tres banderas colocadas verticalmente en un mástil?*



Resolución: Si cambiamos la posición de las tres banderas colocadas verticalmente en un mástil, obtenemos una señal distinta. Por tanto, se trata de variaciones ordinarias, $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ *señales distintas.*

Ejercicio 4.6 *Averiguar cuantos caracteres se pueden formar con las rayas y puntos del alfabeto Morse si para cada uno se puede usar como máximo 5 signos.*

Resolución: Un carácter de 5 signos se puede formar de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ *maneras, ya que para cada signo hay 2 posibilidades: punto o raya. Dicho de otro modo, hay* $VR_{2,5} = 2^5 = 32$ *maneras.*

Pero podemos formar caracteres de 4, 3, 2 y un signo, por lo que el total será:
$VR_{2,1} + VR_{2,2} + VR_{2,3} + VR_{2,4} + VR_{2,5} = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$

Ejercicio 4.7 *En el Libro V de sus Leyes, Platón propone la cifra de 5.040 como el número de habitantes de la ciudad ideal. Argumenta que 5.040 posee un número grande de divisores, lo que, a fines de impuestos, reparto de tierras, servicio militar, etc., permitiría distribuir eficientemente a la población. ¿Cuántos divisores tiene el número 5.040?*

Resolución: Observamos, en primer lugar, que $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$. *Si descomponemos dicho número en factores primos:*

$$5.040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

Los divisores del número 5.040 tienen la forma $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, *con* $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 3$, $0 \leq c \leq 1$ *y* $0 \leq d \leq 1$. *Por el principio del producto, el total de divisores será* $5 \times 3 \times 2 \times 2 = 60$.

Pero, por ejemplo, los números 7.560 y 9.240 poseen cada uno 64 divisores, el máximo para un número de cuatro cifras, cosa que (tal vez) Platón ignoraba.

Ejercicio 4.8 *¿De cuántas maneras pueden distribuirse 8 personas en 4 habitaciones, una con 3 camas, dos con 2 camas y una con una sola cama, sin tener en cuenta el orden de las personas dentro de las habitaciones?*

Resolución: Podemos distribuir las 8 personas de $C_{8,3} = \binom{8}{3}$ *maneras en la primera habitación. Las 5 personas restantes las podemos distribuir de* $C_{5,2} = \binom{5}{2}$ *maneras en la segunda habitación. Las 3 personas restantes las podemos distribuir de* $C_{3,2} = \binom{3}{2}$ *maneras en la segunda habitación. La última persona que nos queda la acomodamos en la última habitación. En total tenemos:*

$$C_{8,3} \times C_{5,2} \times C_{3,2} \times C_{1,1} = \binom{8}{3} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 1680 \textit{ maneras}$$

Ejercicio 4.9 *Se dispone de 5 colores diferentes de pintura. ¿Cuántas mezclas diferentes de 3 colores se pueden realizar?*

Resolución: No importa el orden en que se mezclan los colores. Por tanto, la respuesta es

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = 30 \textit{ mezclas}$$

Ejercicio 4.10 *El profesor de Literatura da una lista de 12 obras literarias de las que hay que leer 3. ¿Cuántas elecciones son posibles?*

Resolución: No importa el orden de lectura de las tres obras. Por lo tanto, la respuesta es

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = 220 \textit{ elecciones}$$

Ejercicio 4.11 *Averiguar cuántas guardias de 5 personas se pueden organizar con 14 soldados con la condición de que el más antiguo participe en todas ellas.*

Resolución: Hay que elegir 4 de entre 13 soldados, ya que hay uno que siempre está incluido. Por otra parte, no importa el orden de elección. Por tanto:

$$C_{13,4} = \binom{13}{4} = 4290 \textit{ guardias}$$

Ejercicio 4.12 *En una carrera en la que participan 10 caballos hay dos tipos de apuestas: en la primera hay que acertar el ganador, el segundo y el tercer clasificados; en la segunda hay que acertar los cuatro primeros clasificados, pero no el orden de llegada a la meta. ¿Cuál de los dos tipos de apuesta es más fácil de acertar?*

Resolución: En la primera carrera, los tres primeros clasificados pueden llegar a la meta de $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ *maneras.*

En la segunda carrera, los cuatro primeros clasificados (sin importar el orden), pueden serlo de $C_{10,4} = 210$ *maneras.*

Por tanto, es más fácil de acertar la segunda apuesta.

Ejercicio 4.13 *Con las cifras 1, 1, 2, 2, 3, ¿cuántos números de 5 cifras se pueden formar, entrando las cinco en cada uno? Si se ordenan en orden creciente, ¿qué lugar ocupará el número 21312?.*

Resolución: El total de números es:

$$PR_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

Para encontrar el lugar que ocupa el 21312 utilizamos un algoritmo basado en el paradigma "divide y vencerás". Como son 5 números, la quinta parte del total comienza por cada una de las cinco cifras. Por tanto, por 1 comienzan $2 \cdot \frac{30}{5} = 2 \cdot 6 = 12$ *números. Otros tantos empiezan por 2. Vamos a escribirlos ordenadamente:*

21123
21132
21213
21231
21312

El número capicúa 21312 *ocupa el lugar* 17.

Ejercicio 4.14 *¿Cuántos números de cuatro cifras distintas pueden escribirse con los números 0, 2, 4 y 6?*

Resolución: Del total de números $P_4 = 4! = 24$, *la cuarta parte* $24/4 = 6$ *comienzan por cero. Por tanto, la respuesta es* $24 - 6 = 18$ *números de cuatro cifras distintas.*

2046	4026	6024
2064	4062	6042
2406	4206	6204
2460	4260	6240
2604	4602	6402
2640	4620	6420

Ejercicio 4.15 *¿Cuántas columnas rellena un quinielista que juega un boleto múltiple con 2 triples y 4 dobles?*

Resolución: Supongamos, sin perder generalidad, que los dos triples son los partidos 1 y 2 del boleto y los dobles son los partidos 3, 4, 5 y 6. Para el primer partido, el quinielista ha hecho 3 apuestas: 1, x, 2, y lo mismo para el segundo partido. Para los dos primeros partidos ha hecho $3 \times 3 = 9$ *apuestas. En el tercer partido ha puesto un doble. Por lo tanto, para los tres primeros partidos ha hecho* $3 \times 3 \times 2 = 18$ *apuestas. En los 2 triples y los 4 dobles ha hecho un total de* $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 144$ *apuestas, esto es,* $VR_{2,3} \times VR_{2,4} = 2^3 \times 2^4 = 144$.

Ejercicio 4.16 *Disponemos de pintura de siete colores distintos. ¿De cuántas maneras podremos pintar un tetraedro regular sin mezclar colores y sin utilizar el mismo color para dos caras adyacentes?.*

Resolución: Un tetraedro tiene cuatro caras que son adyacentes entre sí. Por tanto, habrá $C_{7,4} = \dfrac{7!}{4!\ 3!} = 35$ *maneras.*

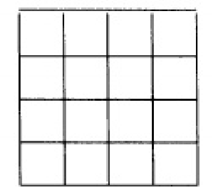
Ejercicio 4.17 *¿De cuántas maneras pueden ordenarse las 26 letras del alfabeto de manera que: a) las vocales aparezcan juntas, b) las letras X e Y no sean consecutivas?*

Resolución: a) Consideremos las 5 vocales como una unidad. En total tendremos que ordenar $21+1=22$ *elementos. Hay* $22!$ *maneras de hacerlo. Será preciso que multipliquemos por* $5!$, *que son las ordenaciones internas de las 5 vocales. En total,* $5!\cdot 22!$.

b) Consideremos las letras X e Y como una unidad. Tendremos que ordenar $24+1=25$ *elementos. Hay* $25!$ *maneras de hacerlo. Por otra parte, hay* $2!$ *maneras de ordenar X e Y. Por último, al total de ordenaciones* $26!$ *de las 26 letras tenemos que restarle* $2!\cdot 25!$*:*

$$26! - 2!\cdot 25!$$

Ejercicio 4.18 *¿De cuántas formas se puede pintar la cuadrícula de la figura, si:*



a) cada casilla puede ser indistintamente blanca o negra?

b) debe haber 8 casillas negras y 8 blancas?

c) debe haber 2 casillas blancas, 4 negras y 10 rojas?

d) cada una de las 16 casillas debe pintarse con un color distinto?

Resolución: a) Para la primera casilla hay 2 posibilidades: blanca o negra. Para la segunda casilla ocurre exactamente igual. Por tanto, para las dos primeras casillas hay $2\times 2=4$ *posibilidades. Para las 16 casillas habrá un total de* 2^{16} *posibilidades.*

b) Se trata de un arreglo de 16 letras en donde 8 son "b" y 8 son "n". Por ejemplo, una posibilidad sería:

$$nnnbbbbbnnnnbbbn$$

Por tanto, la respuesta es $PR_{16}^{8,8} = \frac{16!}{8!\cdot 8!}$

c) Igual que antes, $PR_{16}^{2,4,10} = \frac{16!}{2!\cdot 4!\cdot 10!}$

d) $P_{16} = 16!$

Ejercicio 4.19 *En una fábrica hay varios centros de almacenamiento, cada uno de los cuales está unido a los demás por una cinta transportadora. Calcula el número de centros de la fábrica si se sabe que el número de cintas transportadoras es de 66.*

Resolución: Si el número de centros es igual a n*, el total de cintas transportadoras será igual a* $C_{n,2}$*. Por tanto:*

$$C_{n,2} = 66 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 66 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 66 \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow n = 12$$

Ejercicio 4.20 *Un grupo de tres chicos y dos chicas son colocados al azar en una mesa circular. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse? a) si han de estar las dos chicas juntas, b) si no pueden sentarse las dos chicas juntas. (Dos colocaciones son iguales si una puede ser obtenida de la otra mediante una rotación apropiada).*

Resolución: Al ser una mesa circular, fijamos un chico como referencia, por ejemplo, O_1*. A los otros dos chicos los nombramos con la letra* O*. A las chicas las nombramos con la letra* A*. Las colocaciones con las dos chicas juntas son:*

$$O_1AAOO \rightarrow 2! \cdot 2! = 4$$

$$O_1OAAO \rightarrow 2! \cdot 2! = 4$$

$$O_1OOAA \rightarrow 2! \cdot 2! = 4$$

Hemos multiplicado por las permutaciones $2! \cdot 2!$ *de las dos* A *y de las dos* O*. En total, tenemos* $4+4+4=12$ *colocaciones con las dos chicas juntas.*

Las colocaciones con las dos chicas separadas son:

$$O_1AOAO \rightarrow 2! \cdot 2! = 4$$

$$O_1AOOA \rightarrow 2! \cdot 2! = 4$$

$$O_1OAOA \rightarrow 2! \cdot 2! = 4$$

En total, tenemos $4+4+4=12$ *formas con las dos chicas separadas.*

Ejercicio 4.21 *En el campeonato de liga de fútbol hay 20 equipos. ¿De cuántas formas pueden clasificarse los 6 primeros si se sabe que el Betis ha quedado entre ellos.*

Resolución: Si el Betis ha quedado entre los 6 primeros, quedan 5 puestos para los 19 equipos restantes, que se pueden repartir de $V_{19,5}$ *maneras. Además, tendremos que multiplicar por 6, que son las posiciones que puede ocupar el Betis. Por tanto, la respuesta es* $6 \cdot V_{19,5}$*.*

Otra forma de hacerlo es restando al total de posibles clasificaciones aquellas que no incluyen al Betis entre los 6 primeros: $V_{20,6} - V_{19,6}$*.*

Ejercicio 4.22 *¿De cuántas formas pueden sentarse 6 personas alrededor de una mesa circular si hay dos de ellas que no pueden sentarse juntas?*

Resolución: Consideremos las dos personas que no pueden sentarse juntas como una unidad. Al total de posibilidades $(6-1)! = 5!$ *tendremos que restarle las que tienen juntas a esas dos personas* $2 \cdot 4!$ *En total:*

$$5! - 2 \cdot 4! = 120 - 48 = 72$$

Ejercicio 4.23 *Hallar la suma de todos los números de cuatro cifras significativas, todas ellas pares y diferentes.*

Resolución: Las cifras son 2, 4, 6 y 8. El total se números será igual a $P_4 = 4! = 24$. *Si colocamos los 24 números en columna para sumarlos, en la primera columna hay* $24/4 = 6$ *doses, 6 cuatros, 6 seises y 6 ochos. Su suma es igual a*

$$6 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 6 \cdot (2 + 4 + 6 + 8)$$

La suma de las cuatro columnas restantes será exactamente la misma. Pero la primera columna son millares, la segunda columna son centenas, la tercera columna son decenas y la cuarta columna son unidades. Por tanto, la suma de los 24 números será:

$$1000 \cdot 6 \cdot (2+4+6+8) + 100 \cdot 6 \cdot (2+4+6+8) + 10 \cdot 6 \cdot (2+4+6+8) + 6 \cdot (2+4+6+8) =$$

$$= (1000 + 100 + 10 + 1) \cdot 6 \cdot (2 + 4 + 6 + 8) = 1111 \cdot 6 \cdot 20 = 133320$$

Ejercicio 4.24 *¿Cuántas palabras (con sentido o no) se pueden formar con las mismas letras de la palabra CASTO y que empiecen y terminen por vocal?*

Resolución: Como hay dos vocales, A y O, quedan tres letras, C, S y T, para permutar entre ellas. La respuesta es $2 \cdot P_3 = 2 \cdot 3! = 12$ *palabras. Hemos multiplicado por 2, ya que la mitad empiezan por A y terminan en O y la otra mitad empiezan en O y terminan en A.*

Ejercicio 4.25 *¿Cuántos puntos de intersección producen 8 rectas coplanarias, sabiendo que dos de ellas son paralelas?*

Resolución: Si apartamos una de las dos rectas paralelas, nos quedan 7 rectas que se cortan en $C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ *puntos. La otra recta determina 6 puntos de corte que tendremos que sumar a los anteriores. En total 21+6=27 puntos de corte.*

Ejercicio 4.26 *¿Cuántos números de cinco cifras se pueden escribir con cuatro doses y cuatro cincos?*

Resolución: Hay las siguientes posibilidades:

$$4 \text{ doses y } 1 \text{ cinco}: \; PR_5^{4,1} = \frac{5!}{4! \; 1!} = 5$$

$$3 \text{ doses y } 2 \text{ cincos}: \ PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\ 2!} = 10$$

$$2 \text{ doses y } 3 \text{ cincos}: \ PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\ 3!} = 10$$

$$1 \text{ dos y } 4 \text{ cincos}: \ PR_5^{1,4} = \frac{5!}{1!\ 4!} = 5$$

En total: $5 + 10 + 10 + 5 = 30$ *números.*

Ejercicio 4.27 *Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, se forman números de tres cifras. ¿Cuántos números diferentes pueden formarse sin repetir las cifras y que sean múltiplos de 3?* [1]

Resolución: Escogemos los subconjuntos de tres elementos que dan lugar a múltiplos de tres:

$$123,\ 135,\ 234,\ 345 \rightarrow 4 \ subconjuntos$$

Hacemos todas las permutaciones de los tres elementos: $3! = 6$ *para cada subconjunto.*

En total: $4 \cdot 3! = 24$ *números.*

Ejercicio 4.28 *¿De cuántas formas se puede disponer una fila de letras* $abcdxxxxx$*, de modo que ningún par de* x *queden juntas?*

Resolución: Las x *se pueden colocar de una sola manera, como separadores de las demás letras, es decir:*

$$x_\ x_\ x_\ x_\ x$$

En los huecos se pueden colocar las restantes letras de $4! = 24$ *formas distintas.*

Ejercicio 4.29 *Con, exactamente, las letras de la palabra FRANCISCO, ¿cuántas palabras pueden formarse que empiecen por N y terminen en consonante?*

Resolución: Fijada la letra N en primer lugar, nos quedan 8 letras de las que 2 son iguales. Por tanto, podremos formar $PR_8^2 = \frac{8!}{2!}$ *palabras. De estas* $\frac{8!}{2!}$ *palabras, habrá que eliminar las que terminen en vocal. La octava parte termina en A y otras tantas en I y en O. Por tanto, el total de palabras será* $\frac{8!}{2!} - 3 \cdot \frac{8!}{8 \cdot 2!}$.

Ejercicio 4.30 *En una fila de cine de 10 butacas, ¿cuántas posiciones diferentes pueden ocupar tres personas?.*

Resolución: Son las permutaciones con repetición de 10 elementos entre los que hay 7 iguales, que son las butacas vacías:

$$PR_{10}^7 = \frac{10!}{7!} = 720 \ maneras$$

[1] Un número es múltiplo de 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejercicio 4.31 *En una cafetería hay 4 tipos de bocadillos. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 6 bocadillos de entre los 4 tipos?*

Resolución: En este problema no importa el orden de la elección de los bocadillos. Por otra parte, es evidente que es posible repetir la elección del tipo de bocadillo. Por tanto, el total de posible elecciones es:

$$CR_{4,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$$

Ejercicio 4.32 *Una ficha de n-dominó es una pieza rectangular cuya superficie está dividida en dos cuadrados. Cada cuadrado puede ser blanco o contener de uno a n puntos. ¿Cuántas fichas diferentes tiene un n-dominó?*

Resolución: Para cada uno de los dos cuadrados de una ficha hay n+1 posibilidades. Además, las puntuaciones pueden ser iguales (fichas dobles). Por tanto, el número de fichas será:

$$CR_{n+1,2} = \binom{n+1+2-1}{2} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

Ejercicio 4.33 *Un club puede elegir presidente y secretario de 506 maneras distintas. ¿Cuántos miembros tiene dicho club?*

Resolución: Si el club tiene n miembros, hay $V_{n,2}$ maneras de elegir presidente y secretario. Por tanto:

$$V_{n,2} = n(n-1) = 506 \Rightarrow n^2 - n - 506 = 0 \Rightarrow n = 23 \text{ } miembros$$

Ejercicio 4.34 *Un partido de fútbol entre los equipos A y B ha finalizado con el resultado de 4 a 2 a favor del equipo A. ¿De cuántas maneras distintas se puede llegar a ese resultado?*

Resolución: Supongamos que el equipo A marca 4 goles seguidos en primer lugar y, a continuación, el equipo B marca sus 2 goles. Lo representamos así:

$$AAAABB$$

El resultado será igual a todas las permutaciones posibles de las 6 letras AAAABB. Por tanto:

$$PR_6^{4,2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$$

Las escribimos todas:

$AAAABB$	$AABBAA$	$ABAAAB$	$ABBAAA$	$BAABAA$
$AAABAB$	$AABABA$	$ABAABA$	$BAAAAB$	$BABAAA$
$AAABBA$	$AABAAB$	$ABABAA$	$BAAABA$	$BBAAAA$

Ejercicio 4.35 *En un grupo de 5 hombres y 6 mujeres se ha de formar un comité de 4 personas. ¿De cuántas maneras se podrá formar dicho comité si, a) ha de estar integrado por 2 hombres y 2 mujeres, b) tiene que haber más mujeres que hombres, c) tiene que haber al menos 3 hombres.*

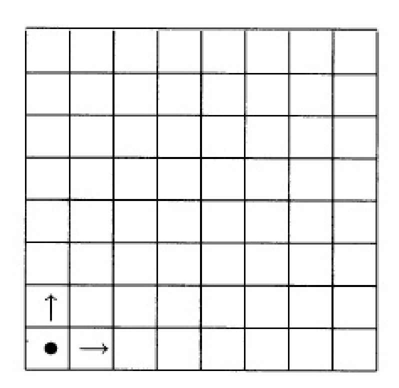
Resolución:

$$a)\quad \binom{5}{2}\binom{6}{2} = \frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2} = 150$$

$$b)\quad \binom{5}{1}\binom{6}{3} + \binom{5}{0}\binom{6}{4} = 175$$

$$c)\quad \binom{5}{3}\binom{6}{1} + \binom{5}{4}\binom{6}{0} = 65$$

Ejercicio 4.36 *Tenemos un rey situado en la esquina inferior derecha de un tablero de ajedrez y queremos llevarlo a la esquina diagonalmente opuesta. Los movimientos del rey son de una casilla hacia arriba o hacia la derecha. ¿Cuántos caminos posibles hay?*



Resolución: El rey debe efectuar 7 movimientos hacia arriba (A) y 7 hacia la derecha (D). Por ejemplo:

$$AAAAAAADDDDDDD$$

La solución es igual a todas las permutaciones posibles de las 14 letras anteriores:

$$PR_{14}^{7,7} = \frac{14!}{7!\cdot 7!}$$

Ejercicio 4.37 *Dado el conjunto* $A = \{1,2,3,4,5\}$ *y la sustitución* $S = \binom{12345}{34251}$, *hallar* S^{-1} *y comprobar que* $S\cdot S^{-1} = I$.

Resolución: La sustitución P transforma $1 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 2$, $4 \to 5$ *y* $5 \to 1$. *La sustitución* S^{-1} *debe transformar* $3 \to 1$, $4 \to 2$, $2 \to 3$, $5 \to 4$ *y* $1 \to 5$. *Por tanto:*

$$S^{-1} = \binom{12345}{53124}$$

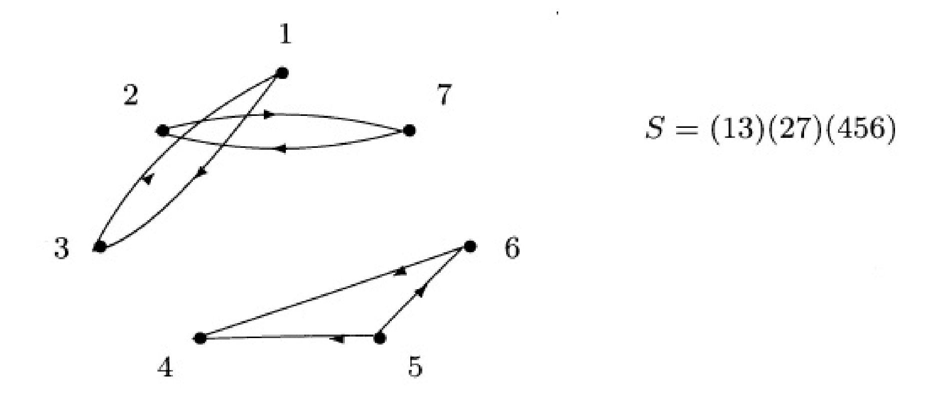
En efecto:

$$S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 34251 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12345 \\ 53124 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12345 \end{pmatrix} = I$$

Ejercicio 4.38 *Dada la sustitución* $S = \binom{1234567}{3715642}$, *descomponerla en producto de ciclos disjuntos y representarla mediante un grafo.*

Resolución: La sustitución hace corresponder $1 \to 3 \to 1$. *Por tanto, presenta el ciclo* (13). *Por otra parte,* $2 \to 7 \to 2$ *y* $4 \to 5 \to 6 \to 4$. *Presenta los ciclos* (27) *y* (456). *Por tanto:*

$$S = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3715642 \end{pmatrix} = (13)(27)(456)$$



Ejercicio 4.39 *¿De cuántas formas se pueden elegir 8 monedas de una caja que contiene 20 monedas de un euro y 10 monedas de dos euros?*

Resolución: No importa el orden de elección y las monedas de un euro son idénticas entre sí, al igual que las monedas de dos euros. Por tanto, el total de formas es:

$$CR_{2,8} = \binom{2+8-1}{8} = \binom{9}{8} = 9$$

Las escribimos todas:

11111111
11111112
11111122
11111222
11112222
11122222
11222222
12222222
22222222

Ejercicio 4.40 *Una persona dispone de 3 peras, 2 manzanas y 4 plátanos. Si cada día come una pieza de fruta, ¿de cuántas formas puede comer las nueve frutas?*

Resolución: Suponiendo que las peras son idénticas entre sí, al igual que las manzanas o los plátanos, la respuesta es igual al total de alineaciones posibles de las nueve piezas de fruta:

$$PR_9^{3,2,4} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 1260 \; maneras$$

Ejercicio 4.41 *¿De cuántas formas se puede ir en el espacio tridimensional desde el punto (0,0,0) al (4,3,5) si sólo está permitido desplazarse en cada movimiento una unidad en las direcciones positivas de los ejes?*

Resolución: Será preciso realizar 12 movimientos, 4 en la dirección positiva del eje OX, 3 en la dirección positiva del eje OY y 5 en la dirección positiva del eje OZ, de todas las formas posibles. Por tanto:

$$PR_{12}^{4,3,5} = \frac{12!}{4! \cdot 3! \cdot 5!} = 27720 \; formas$$

Ejercicio 4.42 *En una urna hay cinco bolas blancas y seis bolas negras. Se extraen siete. ¿Cuántas muestras distintas pueden extraerse? ¿en cuántas de ellas figuran tres bolas blancas?*

Resolución: Pueden extraerse 5 bolas blancas y 2 negras de las maneras siguientes:

$$C_{5,5} \cdot C_{6,2} = \binom{5}{5} \cdot \binom{6}{2} = 15$$

Pueden extraerse 4 bolas blancas y 3 negras de las maneras siguientes:

$$C_{5,4} \cdot C_{6,3} = \binom{5}{4} \cdot \binom{6}{3} = 100$$

Pueden extraerse 3 bolas blancas y 4 negras de las maneras siguientes:

$$C_{5,3} \cdot C_{6,4} = \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{4} = 150$$

Pueden extraerse 2 bolas blancas y 5 negras de las maneras siguientes:

$$C_{5,2} \cdot C_{6,5} = \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{5} = 60$$

Por último, pueden extraerse 1 bola blanca y 6 negras de las maneras siguientes:

$$C_{5,1} \cdot C_{6,6} = \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{6} = 5$$

Por tanto, las maneras posibles de extraer siete bolas son:

$$15 + 100 + 150 + 60 + 5 = 330$$

Por otra parte, figurarán tres bolas blancas en:

$$C_{5,3} \cdot C_{6,4} = \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{4} = 150$$

Ejercicio 4.43 *¿Cuántos términos tiene un polinomio completo y homogéneo de grado dos con tres indeterminadas?*

Resolución: El polinomio tendrá la forma

$$a_{11}\ x_1^2 + a_{22}\ x_2^2 + a_{33}\ x_3^2 + a_{12}\ x_1x_2 + a_{13}\ x_1x_3 + a_{23}\ x_2x_3$$

que tiene $CR_{3,2} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$ *términos.*

Ejercicio 4.44 *Queremos colocar en una estantería tres libros de álgebra con el mismo formato, cinco de cálculo iguales entre sí y cuatro libros iguales de física. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?*

Resolución: Tenemos que colocar doce libros de los que 3, 5 y 4 son iguales. Por tanto:

$$PR_{12}^{3,5,4} = \frac{12!}{3!\ 5!\ 4!} = 27720 \ maneras$$

Ejercicio 4.45 *Determinar cuántos productos diferentes con tres factores diferentes podemos obtener con los números 13, 15, 17, 19, 21 y 23, tomados tres a tres.*

Resolución: Como el orden de los factores no tiene importancia, podemos obtener:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!\ 3!} = 20 \ productos$$

Ejercicio 4.46 *Sean a y b dos elementos de un conjunto A que tiene doce elementos. Determinar: i) ¿Cuántos subconjuntos de A con siete elementos contienen al elemento a, pero no al b?. ii) ¿Cuántos subconjuntos de A con ocho elementos no contienen al elemento a ni al b?*

Resolución: i) Si el elemento a pertenece a un subconjunto, pero no el b, hay que seleccionar 6 elementos entre los 10 restantes, sin importar el orden:

$$C_{10,6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210 \ subconjuntos$$

ii) Si un subconjunto no contiene ni al elemento a ni al b, hay que seleccionar 8 elementos entre los 10 restantes:

$$C_{10,8} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \ subconjuntos$$

Ejercicio 4.47 *¿Cuántas palabras pueden formarse con n vocales y n consonantes dadas, de modo que no haya dos vocales juntas ni dos consonantes juntas?*

Resolución: Si una palabra comienza con una vocal, hay n posibilidades para dicha primera letra. Para la segunda letra, que ha de ser una consonante, hay otras n posibilidades. Para la tercera letra (vocal) hay n-1 posibilidades, que son las vocales que quedan. Para la cuarta letra (consonante) hay n-1 posibilidades, etc. En total:

$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \; ... \; 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = (n!)^2$$

Pero, si se comienza con una consonante hay otras tantas posibilidades. En total:

$$2 \cdot (n!)^2$$

Ejercicio 4.48 *¿De cuántas maneras se pueden ordenar la palabra EXAMENES si no puede haber dos E adyacentes?*

Resolución: Las tres E se pueden colocar de forma no adyacente de 20 maneras distintas:

E	–	E	–	E	–	–	–
E	–	E	–	–	E	–	–
E	–	E	–	–	–	E	–
E	–	E	–	–	–	–	E
E	–	–	E	–	E	–	–
E	–	–	E	–	–	E	–
E	–	–	E	–	–	–	E
E	–	–	–	E	–	E	–
E	–	–	–	E	–	–	E
E	–	–	–	–	E	–	E
–	E	–	E	–	E	–	–
–	E	–	E	–	–	E	–
–	E	–	E	–	–	–	E
–	E	–	–	E	–	E	–
–	E	–	–	E	–	–	E
–	E	–	–	–	E	–	E
–	–	E	–	E	–	E	–
–	–	E	–	E	–	–	E
–	–	E	–	–	E	–	E
–	–	–	E	–	E	–	E

Las restantes cinco letras se pueden colocar de 5! *maneras distintas. En total:*

$$20 \cdot 5! = 2400 \; maneras$$

Ejercicio 4.49 *¿Cuántas soluciones enteras positivas tiene la ecuación*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6?$$

Resolución: Es análogo al ejemplo 4.17. El número de soluciones enteras no negativas es igual a:

$$C_{6-1,4-1} = \binom{5}{3} = 10$$

que son:

1122
1212
1221
2112
2121
2211
1113
1131
1311
3111

Capítulo 5

Potencia de un binomio. Triángulo de Pascal

5.1 Introducción

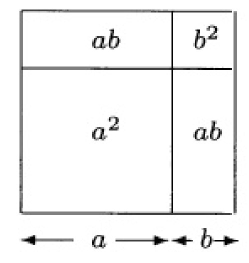
En este tema tratamos de la potencia de un binomio $(a+b)^n$, que es de gran utilidad en múltiples ocasiones y permite realizar de forma rápida los cálculos. Recordaremos las propiedades de los números combinatorios y veremos el *triángulo de Pascal o Tartaglia*, para generalizar posteriormente en el llamado *binomio de Newton*. También veremos a continuación varias propiedades interesantes de dicho triángulo.

5.2 Cuadrado de un binomio

Podemos obtener el valor de $(a+b)^2$ multiplicando directamente $a+b$ por $a+b$:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Geométricamente, $(a+b)^2$ es el área del cuadrado de lado $a+b$, que es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados a y b y de los dos rectángulos de dimensiones $a \times b$:

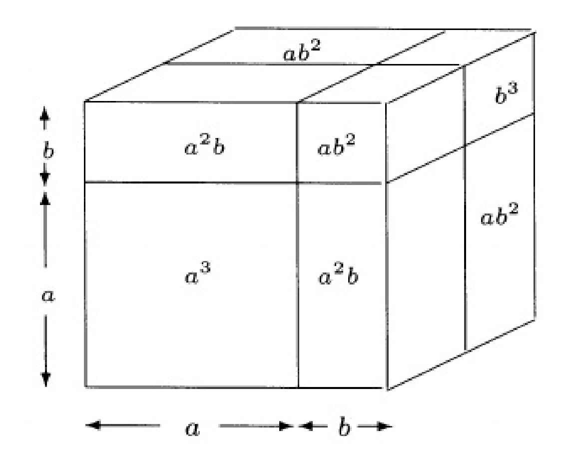


5.3 Cubo de un binomio

Del mismo modo, podemos obtener el valor de $(a+b)^3$ multiplicando directamente $a+b$ por $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Geométricamente, $(a+b)^3$ es el volumen del cubo de arista $a+b$, que se puede descomponer en la suma de varios paralelepípedos:



5.4 Triángulo de Pascal o Tartaglia

Las cuatro primeras potencias de $a+b$ son:

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Al disponer los coeficientes de $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ y $(a+b)^4$ en filas sucesivas, se forman el llamado *triángulo de Tartaglia*:

fila 0					1				
fila 1				1		1			
fila 2			1		2		1		
fila 3		1		3		3		1	
fila 4	1		4		6		4		1

Se observa que en cada fila los números de los extremos son iguales a 1 y que cada uno de los restantes son iguales a la suma de los dos números situados justamente encima de él. Así, en la cuarta fila: 4=1+3, 6=3+3 y 4=3+1. De este modo, se

pueden escribir los coeficientes de $(a+b)^5$ sin necesidad de efectuar el producto, y que son 1 5 10 10 5 1; así como las sucesivas filas del triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1
\end{array}
$$

Por otra parte, en $(a+b)^4$, las potencias de a comienzan por a^4 y siguen un orden descendiente en los sucesivos monomios: a^3, a^2, a^1, $a^0 = 1$, mientras que las potencias de b comienzan por $b^0 = 1$ y siguen un orden ascendente: b^1, b^2, b^3, b^4. De este modo, se puede escribir el desarrollo de $(a+b)^5$ sin necesidad de efectuar el producto:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Si en lugar de $(a+b)^5$ deseamos calcular $(a-b)^5$, podemos desarrollar $[a+(-b)]^5$, resultando:

$$(a-b)^5 = [a+(-b)]^5 = a^5 + 5a^4(-b) + 10a^3(-b)^2 + 10a^2(-b)^3 + 5a(-b)^4 + (-b)^5 =$$
$$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Los signos son alternadamente positivos y negativos.

Ejemplo 5.1 $(2x-y)^4 = (2x)^4 - 4(2x)^3y + 6(2x)^2y^2 - 4(2x)y^3 + y^4 =$
$$= 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4.$$

5.5 El binomio de Newton

Si tenemos m letras, podemos formar con ellas $m!$ alineaciones. Pero si entre esas m letras hay n letras iguales y las restantes $m-n$ letras también iguales entre sí, tendremos que dividir por $n!$ y por $(m-n)!$ para eliminar las permutaciones de esas letras, que dan lugar a alineaciones idénticas. El total de alineaciones posibles coincide con el número combinatorio:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

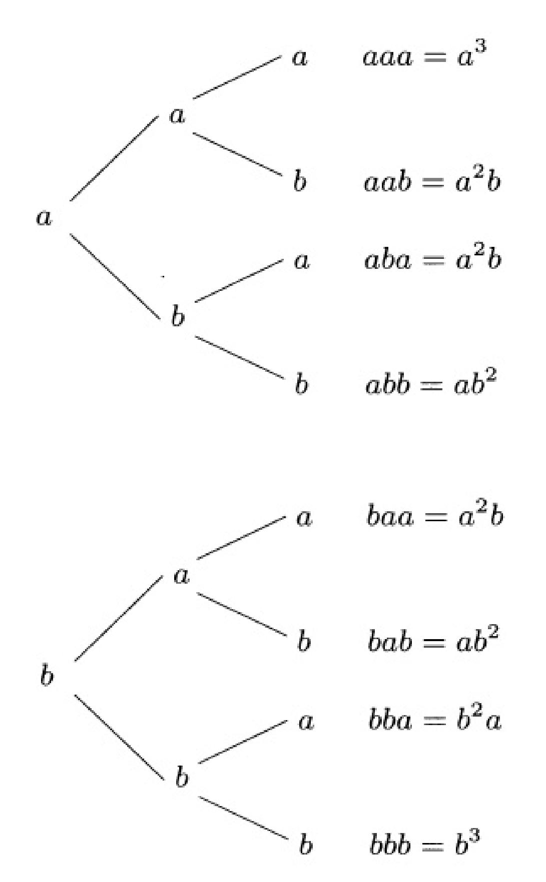
Por ejemplo, las alineaciones distintas que podemos formar con las letras a, a, b y b, serán *aabb*, *abab*, *abba*, *baba*, *baab* y *bbaa*. En total:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$$

Si queremos calcular

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

cada término del desarrollo constará de tres letras obtenidas escogiendo de todas las maneras posibles una de cada uno de los factores de $(a+b)^3$. Utilizando un diagrama de árbol:



Por tanto, en el desarrollo de $(a+b)^3$ aparecerán los siguientes términos distintos:

Con parte literal a^3: $\binom{3}{0} = 1$

Con parte literal a^2b: $\binom{3}{1} = 3$

Con parte literal ab^2: $\binom{3}{2} = 3$

Con parte literal b^3: $\binom{3}{3} = 1$

Es posible reescribir el triángulo anterior:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

utilizando números combinatorios:

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\ \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\ \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\ \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \end{array}$$

Así, reescribimos el desarrollo de $(a+b)^3$:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Además, observamos que el exponente de a en cada binomio es igual a la diferencia entre el *índice* y el *orden* del número combinatorio y el exponente de b es igual al *orden* de dicho número combinatorio.

En general:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ \dots \ + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

5.6 Fórmula de Leibniz

Queremos generalizar la expresión de la potencia de un binomio:

$$(x_1+x_2)^n = \binom{n}{0}x_1^n + \binom{n}{1}x_1^{n-1}x_2 + \binom{n}{2}x_1^{n-2}x_2^2 + \ \dots \ + \binom{n}{n-1}x_1x_2^{n-1} + \binom{n}{n}x_2^n$$

a un polinomio con p variables $x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots \ + x_p$:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots \ + x_p)^n = (x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots \ + x_p)(x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots \ + x_p) \ \dots$$

$$\ldots \; (x_1 + x_2 + x_3 + \; \ldots \; + x_p) = \sum_{0 \leq n_i \leq n} \binom{n}{n_1 n_2 \; \ldots \; n_p} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \; \ldots \; x_p^{n_p}$$

con $n_1 + n_2 + \; \ldots \; + n_p = n$.

Esta fórmula se conoce con el nombre de *fórmula de Leibniz* y a los coeficientes que aparecen en su desarrollo

$$\binom{n}{n_1 n_2 \; \ldots \; n_p} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \; \ldots \; n_p!} = PR_n^{n_1 n_2 \; \ldots n_p}$$

se les denomina *números multinomiales.*

Ejemplo 5.2 *Calcular* $(x_1 + x_2 + x_3)^4$

Resolución:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4 = \frac{4!}{4!0!0!} x_1^4 + \frac{4!}{0!4!0!} x_2^4 + \frac{4!}{0!0!4!} x_3^4 + \frac{4!}{3!1!0!} x_1^3 x_2 + \frac{4!}{1!3!0!} x_1 x_2^3 +$$

$$+ \frac{4!}{0!1!3!} x_2 x_3^3 + \frac{4!}{1!0!3!} x_1 x_3^3 + \frac{4!}{0!3!1!} x_2^3 x_3 + \frac{4!}{3!0!1!} x_1^3 x_3 + \frac{4!}{2!2!0!} x_1^2 x_2^2 +$$

$$+ \frac{4!}{2!0!2!} x_1^2 x_2^2 + \frac{4!}{0!2!2!} x_2^2 x_3^2 + \frac{4!}{2!1!1!} x_1^2 x_2 x_3 + \frac{4!}{1!2!1!} x_1 x_2^2 x_3 + \frac{4!}{1!1!2!} x_1 x_2 x_3^2 =$$

$$= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 4x_1^3 x_2 + 4x_1 x_2^3 + 4x_2 x_3^3 + 4x_1 x_3^3 + 4x_2^3 x_3 + 4x_1^3 x_3 + 6x_1^2 x_2^2 +$$

$$+ 6x_1^2 x_3^2 + 6x_2^2 x_3^2 + 12x_1^2 x_2 x_3 + 12x_1 x_2^2 x_3 + 12x_1 x_2 x_3^2$$

Gottfried Wilhelm Leibniz. *Nació en Leipzig (Alemania) en 1646 y murió en Hannover en 1716. Sus obras tratan de Historia, Lengua, Filosofía, Matemáticas y Física. Realizó contribuciones a la Teoría de Números y al Álgebra. Fue el iniciador de la Lógica Matemática y la Topología.*

5.7 Propiedades del triángulo de Pascal

1. La suma de los números de la fila n es igual a 2^n.

En efecto, si tomamos $a = 1$ y $b = 1$ en

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \; \ldots \; + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

tenemos:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \; \ldots \; + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

2. La suma de los números de una fila es igual al doble de la suma de los números de la fila anterior.

Es inmediato, ya que la suma de los números de la fila n es igual a 2^n y $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$, siendo 2^{n-1} la suma de los elementos de la fila $n-1$.

3. En cada fila, la suma de los números que ocupan el lugar par es igual a la suma de los que ocupan el lugar impar.

En efecto, tomando $a = 1$ y $b = -1$ en el desarrollo:

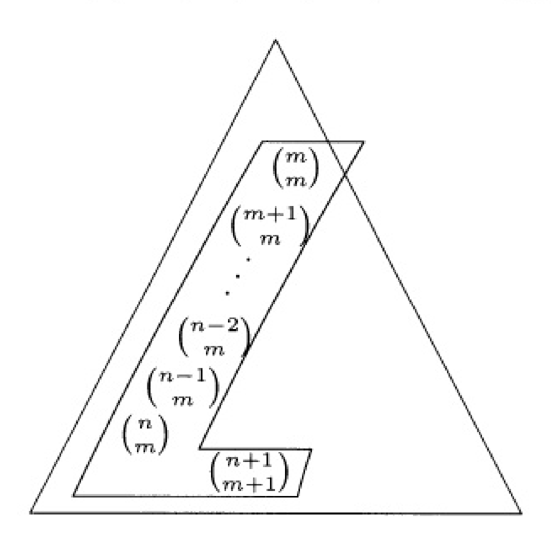
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ \dots \ + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

resulta:

$$(1-1)^n = 0^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ \dots \ + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$$

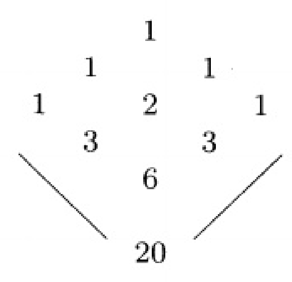
Pasando al primer miembro los términos negativos queda demostrado.

4. Fórmula del "stick de Hockey". Cualquier número del triángulo es igual a la suma de todos los números de las filas precedentes situados en la diagonal anterior a dicho número. En la figura, $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \ \dots + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$



5. Un número cualquiera es igual a 1 más la suma de todos los números situados por encima de sus líneas diagonales. Por ejemplo, para el número 20, situado en la sexta fila del triángulo, tenemos que:

$$20 = 1 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 3 + 6)$$



6. Si se consideran los elementos de cada fila como los dígitos de un número se obtienen las potencias de 11:

$$1 = 11^0$$
$$11 = 11^1$$
$$121 = 11^2$$
$$1331 = 11^3$$
$$14641 = 11^4$$

En efecto, un número cualquiera, por ejemplo 121, es igual a 1 centenas, 2 decenas y 1 unidades, esto es: $121 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$. Por tanto:

$$11^2 = (10+1)^2 = \binom{2}{0}10^2 + \binom{2}{1}10 + \binom{2}{2} = 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = 121$$

$$11^3 = (10+1)^3 = \binom{3}{0}10^3 + \binom{3}{1}10^2 + \binom{3}{2}10 + \binom{3}{3} = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 1331$$

$$11^4 = (10+1)^4 = \binom{4}{0}10^4 + \binom{4}{1}10^3 + \binom{4}{2}10^2 + \binom{4}{3}10 + \binom{4}{4} =$$
$$= 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1 = 14641$$

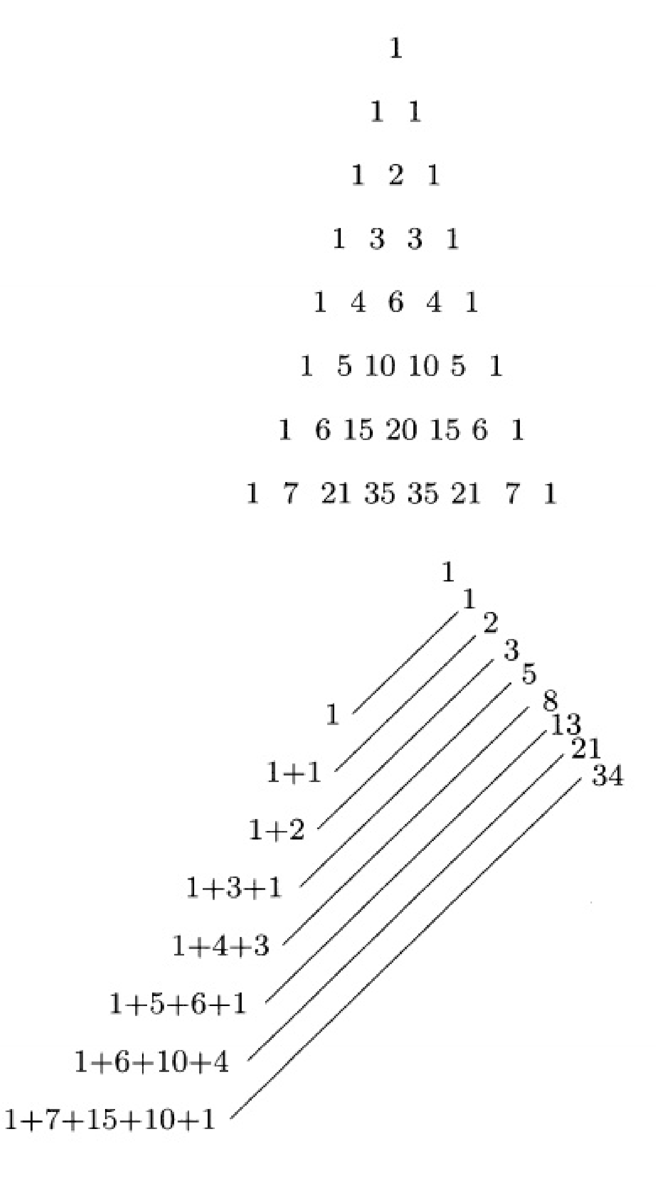
7. Consideremos la sucesión de término general $\frac{n(n+1)}{2}$. Sus términos, 1, 3, 6, 10, 15, ..., reciben el nombre de *números triangulares*. La tercera diagonal del triángulo de Tartaglia son precisamente dichos números. Sumando dos consecutivos se obtiene el cuadrado de un número natural: $1 + 3 = 2^2$, $3 + 6 = 3^2$, $6 + 10 = 4^2$, ...

8. La suma de los n primeros números triangulares es un *número tetraédrico*:

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 6 = 10$$
$$1 + 3 + 6 + 10 = 20, \ etc.$$

La cuarta diagonal del triángulo de Tartaglia son los números *tetraédricos*.

9. La sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., en la que los dos primeros términos son la unidad y cada término posterior es igual a la suma de los dos anteriores, se conoce con el nombre de *sucesión de Fibonacci.* En el triángulo de Tartaglia encontramos dicha sucesión al sumar los números a lo largo de las líneas de la figura:



10. La fontana de Trevi posee recipientes, dispuestos en forma de triángulo, de los que cae el agua en cascada de unos a otros, de modo que si del recipiente superior sale 1 litro de agua, pasa 1/2 litro a cada uno de los recipientes situados debajo de él y así sucesivamente:

1

1/2 1/2

1/4 1/4+1/4=2/4 1/4

1/8 1/8+2/8=3/8 1/8+2/8=3/8 1/8

Los numeradores de cada fracción forman el triángulo de Tartaglia mientras que los denominadores son las potencias de 2.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.1 *Desarrollar* $\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^4$.

Resolución:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^4=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^4-\binom{4}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^3\frac{3}{x^2}+\binom{4}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{3}{x^2}\right)^2-\binom{4}{3}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x^2}\right)^3+$$

$$+\binom{4}{4}\left(\frac{3}{x^2}\right)^4=\frac{1}{x^4}-4\,\frac{3}{x^5}+6\,\frac{9}{x^6}-4\,\frac{27}{x^7}+\frac{81}{x^8}=\frac{1}{x^4}-\frac{12}{x^5}+\frac{54}{x^6}-\frac{108}{x^7}+\frac{81}{x^8}$$

Ejercicio 5.2 *Hallar el cuarto término del desarrollo de* $\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^8$.

Resolución: El cuarto término será

$$-\binom{4}{3}\,\frac{3}{x^2}\,\left(\frac{1}{x}\right)^3=-\frac{12}{x^5}$$

Ejercicio 5.3 *El tercer término del desarrollo de* $\left(x-\frac{3}{x}\right)^n$ *es de primer grado. Hallar el valor de* n.

Resolución: El tercer término será

$$\binom{n}{2}\,x^{n-2}\,\left(\frac{3}{x}\right)^2=\binom{n}{2}\,9\cdot x^{n-4}$$

Por tanto, $n-4=1\Rightarrow n=5$.

Ejercicio 5.4 *En el desarrollo de* $(3x+x^2)^6$, *¿hay algún término de grado 10? Si lo hay, averiguar el lugar que ocupa.*

Resolución: Un término cualquiera del desarrollo es de la forma

$$\binom{6}{n}\,(3x)^{6-n}\,(x^2)^n$$

El grado de la variable es $6-n+2n$. *Por tanto,* $6-n+2n=10\Rightarrow n=4$. *El quinto término es de grado 10.*

Ejercicio 5.5 *El número* 3.01 *es igual a* $3 + 0.01$. *Para calcular* $(3.01)^6$ *hay que realizar seis productos. Hacerlo mediante el triángulo de Pascal y comparar los resultados.*

Resolución:

$$(3+0.01)^6 = 3^6 + 6\cdot 3^5\cdot 0.01 + 15\cdot 3^4\cdot 0.01^2 + 20\cdot 3^3\cdot 0.01^3 + 15\cdot 3^2\cdot 0.01^4 +$$
$$+6\cdot 3\cdot 0.01^5 + 0.01^6 = 729 + 14.58 + 0.1215 + 0.00054 + 0.00000135+$$
$$+0.0000000018 + 0.000000000001 = 743.7020413536$$

La calculadora nos da directamente $3.01^6 = 743.702041351801$.

Ejercicio 5.6 *Repetir el ejercicio anterior con* $(2.99)^6$.

Resolución:

$$(3-0.01)^6 = 3^6 - 6\cdot 3^5\cdot 0.01 + 15\cdot 3^4\cdot 0.01^2 - 20\cdot 3^3\cdot 0.01^3 + 15\cdot 3^2\cdot 0.01^4 -$$
$$-6\cdot 3\cdot 0.01^5 + 0.01^6 = 729 - 14.58 + 0.1215 - 0.00054 + 0.00000135-$$
$$-0.0000000018 + 0.000000000001 = 714.540973498201$$

La calculadora nos da directamente $2.99^6 = 714.540961348201$.

Ejercicio 5.7 *Desarrollar* $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\,)^3$.

Resolución:

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\,)^3 = \frac{3!}{3!\;0!\;0!} + \frac{3!}{0!\;3!\;0!}\,(\sqrt{2}\,)^3 + \frac{3!}{0!\;0!\;3!}\,(\sqrt{3}\,)^3 +$$
$$+\frac{3!}{2!\;1!\;0!}\,\sqrt{2} + \frac{3!}{2!\;0!\;1!}\,\sqrt{3} + \frac{3!}{1!\;2!\;0!}\,(\sqrt{2}\,)^2 + \frac{3!}{1!\;0!\;2!}\,(\sqrt{3}\,)^2 +$$
$$+\frac{3!}{1!\;1!\;1!}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{3!}{0!\;1!\;2!}\,\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}\,)^2 + \frac{3!}{0!\;2!\;1!}\,(\sqrt{2}\,)^2\cdot\sqrt{3} =$$
$$= 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 6 + 9 + 6\sqrt{6} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} =$$
$$= 16 + 14\sqrt{2} + 12\sqrt{3} + 6\sqrt{6}$$

Ejercicio 5.8 *¿Es* $(1.001)^{1000}$ *mayor que* 1.001*?*

Resolución: Utilizando el desarrollo del binomio de Newton:

$$(1.001)^{1000} = (1+0.001)^{1000} =$$
$$= \binom{1000}{0}\,1^{1000} + \binom{1000}{1}\,1^{999}\cdot 0.001 + \binom{1000}{2}\,1^{998}\cdot(0.001)^2 + \;\ldots =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1000\cdot 999}{2}\,(0.001)^2 + \;\ldots = 2.4995 + \ldots$$

Evidentemente, $(1.001)^{1000} > 1.001$

Ejercicio 5.9 *¿De cuántas maneras se puede leer la palabra ALGEBRA en la figura?*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & A & & & \\ & & L & & L & & \\ & G & & G & & G & \\ E & & E & & E & & E \\ & B & & B & & B & \\ & & R & & R & & \\ & & & A & & & \end{array}$$

Resolución: Las dos primeras letras AL se pueden leer de dos maneras. Las tres primeras letras ALG se pueden leer de $2^2 = 4$ *maneras. Las cuatro primeras letras ALGE, de* $2^3 = 8$ *maneras. De otro modo, cada uno de los números del cuadro siguiente, nos indica el total de camino que conducen a cada letra:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Por ejemplo, las cuatro primera letras ALGE se pueden leer de $1+3+3+1=8$ *maneras. Las cinco primeras letras ALGEB se pueden leer de* $4+6+4=14$ *maneras distintas:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 4 & & 6 & & 4 & \end{array}$$

Las seis primeras letras ALGEBR se pueden leer de $10+10=20$ *maneras distintas:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 4 & & 6 & & 4 & \\ & & 10 & & 10 & & \end{array}$$

Por último, la palabra completa ALGEBRA se puede leer de 20 *maneras distintas:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 4 & & 6 & & 4 & \\ & & 10 & & 10 & & \\ & & & 20 & & & \end{array}$$

que es el triángulo de Pascal.

Ejercicio 5.10 *Utilizando el desarrollo del binomio de Newton, calcular*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Resolución:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ \ldots\ =$$

$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!\ n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\ n^3}+\ \ldots$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \ldots =$$

$$= 1+1+0.5+0.1\overline{6}+0.041\overline{6}+0.008\overline{3}+\ \ldots = 2.718281\ldots = e$$

Ejercicio 5.11 *Utilizando el límite de cociente de incrementos, hallar la derivada de la función $f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}$.*

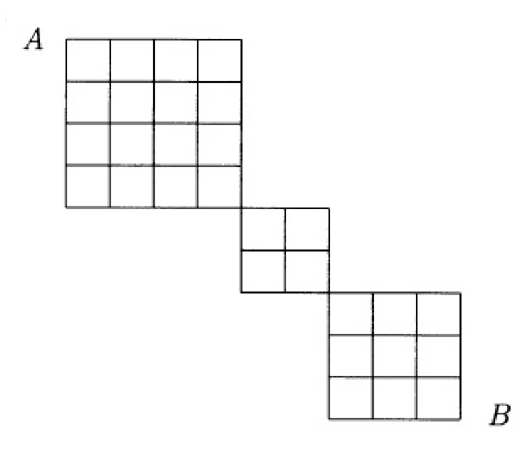
Resolución:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\cdot h+\ldots+\binom{n}{n}h^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot h+\ldots+\binom{n}{n}h^{n-1}\right]=n\cdot x^{n-1}$$

Ejercicio 5.12 *¿Cuántos caminos distintos existen para ir desde el punto A al punto B, pudiendo desplazarse únicamente hacia la derecha o hacia abajo?*



Resolución: Los números representan los caminos, según el triángulo de Pascal, desde la esquina superior izquierda en cada una de las mallas hasta la correspondiente intersección:

A	•	*1*	*1*	*1*	*1*						
	1	*2*	*3*	*4*	*5*						
	1	*3*	*6*	*10*	*15*						
	1	*4*	*10*	*20*	*35*						
	1	*5*	*15*	*35*	*70*	*1*	*1*				
					1	*2*	*3*				
					1	*3*	*6*	*1*	*1*	*1*	
							1	*2*	*3*	*4*	
							1	*3*	*6*	*10*	
							1	*4*	*10*	*20*	*B*

El total de caminos será $70 \cdot 6 \cdot 20 = 8400$.

Ejercicio 5.13 *Obtener los coeficientes del desarrollo de la expresión* $(1 + x + x^2)^n$ *utilizando un triángulo análogo al de Tartaglia:*

							1							
						1	1	1						
					1	2	3	2	1					
				1	3	6	7	6	3	1				
			1	4	10	16	19	16	10	4	1			
		1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1	
1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	161	77	28	7	1

en el que cada entrada es la suma de las tres entradas de la fila superior. Utilizando el triángulo anterior, calcular $(1 + x + x^2)^2$ *y* $(1 + x + x^2)^3$.

Resolución:

$$(1 + x + x^2)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$$

$$(1 + x + x^2)^3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + 6 \cdot x^4 + 3 \cdot x^5 + 1 \cdot x^6 =$$
$$= 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$$

Capítulo 6

Particiones de un conjunto

6.1 Números de Stirling de segunda especie

Dado un conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de cardinal n, al número de particiones de X en k partes (clases) no vacías, con $1 \leq k \leq n$, lo designamos por $S(n,k)$. A dichos números $S(n,k)$ los llamamos *números de Stirling de segunda especie* y también los representaremos por:

$$\left\{ {n \atop k} \right\}$$

Los números de Stirling de segunda especie verifican las siguientes propiedades, análogas a las de los números combinatorios:

1. $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$

2. $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$

3. $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}, \quad 2 \leq k \leq n-1$

O bien:

1. $S(n,1) = 1$

2. $S(n,n) = 1$

3. $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k), \quad 2 \leq k \leq n-1$

En efecto:

1. Sólo hay una partición con una parte, que es $\{X\}$.

2. Sólo hay una partición con n partes, que es $\{\{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_n\}\}$.

3. Si queremos dividir $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ en k partes, podemos dejar el elemento x_n en una parte él sólo y repartir los $n-1$ elementos restantes en $k-1$ partes. Es decir

$$S(n-1, k-1) \ \ formas$$

O bien, dicho elemento x_n va en una parte mezclado con algunos otros elementos. Este último caso lo podemos hacer en dos etapas: primero dividimos los $n-1$ elementos en k partes y después añadimos x_n a una de esas k partes. Es decir

$$k \cdot S(n-1, k) \ \ formas$$

Por tanto, el total de formas será la suma de los dos casos

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k) \ \ formas$$

Ejemplo 6.1 *Queremos dividir el conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ en 2 subconjuntos no vacíos. Existen $S(4, 2) = 7$ formas de hacerlo:*

$$\{x_1, x_2, x_3\} \cup \{x_4\}, \ \{x_1, x_2, x_4\} \cup \{x_3\}, \ \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_1\}, \ \{x_1, x_3, x_4\} \cup \{x_2\},$$
$$\{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\}, \ \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_4\}, \ \{x_1, x_4\} \cup \{x_2, x_3\}$$

El cálculo de $S(4, 2)$ puede hacerse mediante la anterior fórmula recurrente:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

$$S(4, 2) = S(3, 1) + 2 \cdot S(3, 2) = 1 + 2 \cdot [S(2, 1) + 2 \cdot S(2, 2)] =$$
$$= 1 + 2 \cdot [1 + 2 \cdot 1] = 7$$

La relación recurrente $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$, $2 \leq k \leq n-1$, nos sugiere una tabulación similar a la del triángulo de Pascal:

$$\left\{ {1 \atop 1} \right\}$$
$$\left\{ {2 \atop 1} \right\} \left\{ {2 \atop 2} \right\}$$
$$\left\{ {3 \atop 1} \right\} \left\{ {3 \atop 2} \right\} \left\{ {3 \atop 3} \right\}$$
$$\left\{ {4 \atop 1} \right\} \left\{ {4 \atop 2} \right\} \left\{ {4 \atop 3} \right\} \left\{ {4 \atop 4} \right\}$$
$$\left\{ {5 \atop 1} \right\} \left\{ {5 \atop 2} \right\} \left\{ {5 \atop 3} \right\} \left\{ {5 \atop 4} \right\} \left\{ {5 \atop 5} \right\}$$
$$\left\{ {6 \atop 1} \right\} \left\{ {6 \atop 2} \right\} \left\{ {6 \atop 3} \right\} \left\{ {6 \atop 4} \right\} \left\{ {6 \atop 5} \right\} \left\{ {6 \atop 6} \right\}$$
$$\left\{ {7 \atop 1} \right\} \left\{ {7 \atop 2} \right\} \left\{ {7 \atop 3} \right\} \left\{ {7 \atop 4} \right\} \left\{ {7 \atop 5} \right\} \left\{ {7 \atop 6} \right\} \left\{ {7 \atop 7} \right\}$$

Utilizando la fórmula recurrente anterior, obtenemos:

Columnas :	1	2	3	4	5	6	7
	1						
	1	1					
	1	3	1				
	1	7	6	1			
	1	15	25	10	1		
	1	31	90	65	15	1	
	1	63	301	350	140	21	1

Un número cualquiera es igual al número que está encima a su izquierda más el producto de su número de columna multiplicado por el número que tiene encima. Por ejemplo, $65 = 25 + 4 \cdot 10$.

Otra forma de calcular $S(n,k)$ es mediante la fórmula

$$S(n,k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n, \ \forall\, n,k \in I\!N,\ k \leq n$$

Ejemplo 6.2 *Calcular $S(4,2)$.*

$$S(4,2) = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{2}{i} (2-i)^4 =$$

$$= \frac{1}{2!} \left[(-1)^0 \binom{2}{0} (2-0)^4 + (-1)^1 \binom{2}{1} (2-1)^4 \right] = \frac{1}{2} (16-2) = 7$$

6.1.1 Propiedades

1. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$

En efecto, por la fórmula recurrente de la sección 6.1:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1 + 2 \cdot \left[\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \cdot \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] =$$

$$= 1 + 2 \cdot \left[1 + 2 \cdot \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] = 1 + 2 + 2^2 \cdot \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= 1 + 2 + 2^2 \cdot \left[\left\{ \begin{matrix} n-3 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \cdot \left\{ \begin{matrix} n-3 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] = 1 + 2 + 2^2 \cdot \left[1 + 2 \cdot \left\{ \begin{matrix} n-3 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] =$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \cdot \left\{ \begin{matrix} n-3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ \dots \ + 2^{n-2} =$$

$$= \frac{2^{n-2} \cdot 2 - 1}{2-1} = 2^{n-1} - 1$$

donde se ha aplicado la fórmula de la suma de una progresión geométrica.

Ejemplo 6.3 *Utilizando la propiedad anterior:*

$$\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 2^{4-1} - 1 = 7$$

2. $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$

En efecto, aplicando la fórmula $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$:

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \left\{ {n-1 \atop n-2} \right\} + (n-1) \cdot \left\{ {n-1 \atop n-1} \right\} = n - 1 + \left\{ {n-1 \atop n-2} \right\} =$$

$$= n - 1 + \left\{ {n-2 \atop n-3} \right\} + (n-2) \cdot \left\{ {n-2 \atop n-2} \right\} = (n-1) + (n-2) + \left\{ {n-2 \atop n-3} \right\} =$$

$$= (n-1) + (n-2) + \ \dots \ + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

donde se ha aplicado la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética.

Ejemplo 6.4 *Utilizando la propiedad anterior:*

$$\left\{ {4 \atop 3} \right\} = \binom{4}{2} = 6$$

Ejemplo 6.5 *Tenemos 8 estudiantes y queremos dividirlos en 5 grupos para realizar un trabajo (un grupo puede estar constituido por un solo estudiante). ¿De cuántas formas podemos hacerlo?*

Lo que queremos es calcular el número de particiones de un conjunto de 8 estudiantes en 5 partes (clases) no vacías, esto es, $S(8,5)$*:*

$$S(8,5) = \left\{ {8 \atop 5} \right\} = \frac{1}{5!} \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{5}{i} (5-i)^8 =$$

$$= \frac{1}{5!} \left[\binom{5}{0} 5^8 - \binom{5}{1} 4^8 + \binom{5}{2} 3^8 - \binom{5}{3} 2^8 + \binom{5}{4} 1^8 \right] = 1050$$

6.2 Números de Bell

Los términos de la sucesión $\{b_n\}$, con $b_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$:

$$1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, \dots$$

reciben el nombre de *números de Bell*. Cada uno de ellos es igual a la suma de la fila correspondiente del triángulo de los números de Stirling de segunda especie:

							Núm. Bell
1							1
1	1						2
1	3	1					5
1	7	6	1				15
1	15	25	10	1			52
1	31	90	65	15	1		203
1	63	301	350	140	21	1	877

Por ejemplo, para $n = 5$:

$$b_5 = \sum_{k=1}^{5} S(5,k) = S(5,1)+S(5,2)+S(5,3)+S(5,4)+S(5,5) = 1+15+25+10+1 = 52$$

Dicho de otro modo, cada número de Bell indica el número de maneras en que un conjunto de n elementos puede ser partido en subconjuntos disjuntos no vacíos. Veamos un ejemplo aclaratorio.

Ejemplo 6.6 *Sea el conjunto* $X = \{x_1, x_2, x_3\}$.

El número de formas de dividirlo en una parte, es $\left\{ {3 \atop 1} \right\} = 1$*:*

$$\{x_1, x_2, x_3\}$$

El número de formas de dividirlo en 2 subconjuntos, es $\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3$*:*

$$\{x_1\}, \{x_2, x_3\}$$

$$\{x_2\}, \{x_1, x_3\}$$

$$\{x_3\}, \{x_1, x_2\}$$

El número de formas de dividirlo en 3 subconjuntos, es $\left\{ {3 \atop 3} \right\} = 1$*:*

$$\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}$$

En total, $b_3 = 1 + 3 + 1 = 5$.

Otra forma de hallar los números de Bell es mediante la fórmula:

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^n}{i!} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(-1)^j}{j!}, \ \forall n \in I\!N$$

Por ejemplo, si queremos calcular b_3:

$$b_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{i^3}{i!} \sum_{j=0}^{3-i} \frac{(-1)^j}{j!} =$$

$$= \frac{1^3}{1!}\left[\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!}\right] + \frac{2^3}{2!}\left[\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!}\right] + \frac{3^3}{3!}\cdot\frac{(-1)^0}{0!} =$$

$$= \frac{1}{2} + 4\cdot 0 + \frac{9}{2}\cdot 1 = 5$$

La fórmula anterior para el cálculo de los números de Bell es un tanto complicada. Debido a ello, es conveniente el uso del llamado *triángulo de Bell*, que nos proporciona dichos números de un modo sencillo, siguiendo el proceso que se detalla a continuación.

1						
1	2					
2	3	5				
5	7	10	15			
15	20	27	37	52		
52	67	87	114	151	203	
203	255	322	409	523	674	877
...						

Formamos el triángulo de Bell situando un 1 en la parte superior y otro 1 debajo del primero. Sumamos $1 + 1 = 2$ y lo colocamos al final de la segunda fila. Iniciamos la tercera fila con un 2. La suma de dicho 2 con el número 1 situado encima es igual a 3, que situamos a la derecha del 2. La suma de 3 con el número 2 situado encima es 5, que colocamos al final de dicha fila y comienzo de la siguiente, y así sucesivamente. La sucesión de números de Bell aparece en dos lados del triángulo.

6.3 Números de Lah

Los números de Lah, $L(k,n)$, también llamados números de Stirling de tercera especie, se definen en la forma

$$L(k,n) = \frac{k!}{n!}\binom{k-1}{n-1}$$

Dichos números nos dan el total de formas en que un conjunto con k elementos puede partirse en n subconjuntos ordenados no vacíos.

Ejemplo 6.7 *Sea el conjunto $\{a,b,c\}$, de tres elementos (k=3). El total de formas en que podemos hacer una partición en 2 subconjuntos (n=2), será*

$$L(3,2) = \frac{3!}{2!}\binom{3-1}{2-1} = 6$$

que son

$$\begin{array}{ll} \{a\}\{bc\} & \{a\}\{cb\} \\ \{b\}\{ac\} & \{b\}\{ca\} \\ \{c\}\{ab\} & \{c\}\{ba\} \end{array}$$

Podemos elaborar una tabla de doble entrada:

$L(k,n)$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1				
2	2	1			
3	6	6	1		
4	24	36	12	1	
5	120	240	120	20	1

Ivo Lah. Nació en Strukljeva, Austria-Hungría (actualmente Eslovenia) el 5 de septiembre de 1886. Murió en Ljubljana, Yugoslavia (actualmente Eslovenia) el 23 de marzo de en 1979. Su bibliografía científica abarca multitud de tópicos desde la Teoría de Números hasta la Estadística o la Demografía. Su trabajo matemático más relevante, publicado en 1955, es sobre los números que llevan su nombre.

6.4 Descomposición en sumandos de un número

Sea $k \in \mathbb{N}$. Denotamos por $p(k,n)$ el número de descomposiciones (particiones) de k en exactamente n sumandos (partes). Denotamos por $p(k)$ a la suma del total de particiones posibles:

$$p(k) = \sum_{i=1}^{n} p(k,i) = p(k,1) + p(k,2) + \ldots + p(k,n)$$

Ejemplo 6.8 *La única partición posible del número 1 es 1. Por tanto,* $p(1) = 1$.

Las particiones del 2 son: $2 = 1 + 1$. *Por tanto,* $p(2) = 2$.

Las particiones del 3 son: $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$. *Por tanto,* $p(3) = 3$.

Las particiones del 4 son: $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$. *Por tanto,* $p(4) = 5$.

Las particiones del 5 son: $5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$. *Por tanto,* $p(5) = 7$.

Las particiones del 6 son: $6 = 5+1 = 4+2 = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1 = 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1$. *Por tanto,* $p(6) = 11$.

Las particiones del 7 son: $7 = 6+1 = 5+2 = 4+3 = 4+2+1 = 4+1+1+1 = 3+3 = 3+3+1 = 3+2+2 = 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1$. *Por tanto,* $p(7) = 15$.

Los números $p(k,n)$ verifican la siguiente ley de recurrencia:

1. $p(k,1) = 1$

2. $p(k,k) = 1$
3. $p(k,n) = p(k-1,n-1) + p(k-n,n)$

En efecto:

1. Evidentemente, todo $k \in \mathbb{N}$ admite una única descomposición en un sumando, que es el propio k. Por tanto, $p(k,1) = 1$.

2. La única descomposición de k en k sumandos es:

$$k = 1 + 1 + 1 + \ \overset{(k)}{\dots\dots} \ + 1$$

Por tanto, $p(k,k) = 1$.

3. Si agrupamos las $p(k,n)$ descomposiciones en dos clases disjuntas:

a) Las que contienen algún 1 entre sus sumandos:

$$k = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} + 1, \ s_i \geq 1$$

Pasando 1 al primer miembro:

$$k - 1 = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}, \ s_i \geq 1$$

Hay $p(k-1,n-1)$ formas diferentes de descomponer $k-1$ en $n-1$ sumandos.

b) Las que no contienen ningún 1 entre sus sumandos:

$$k = s_1 + s_2 + \dots + s_n, \ s_i > 1$$

Restando n a los dos miembros:

$$k - n = (s_1 - 1) + (s_2 - 1) + \dots + (s_n - 1), \ s_i > 1 \Rightarrow$$

$$k - n = t_1 + t_2 + \dots + t_n, \ con \ \ t_i = s_i - 1 > 0 \Rightarrow t_i \geq 1$$

que representa una descomposición de $k-n$ en n sumandos, cuyo número total es $p(k-n,n)$.

Aplicando la regla de la adición obtenemos:

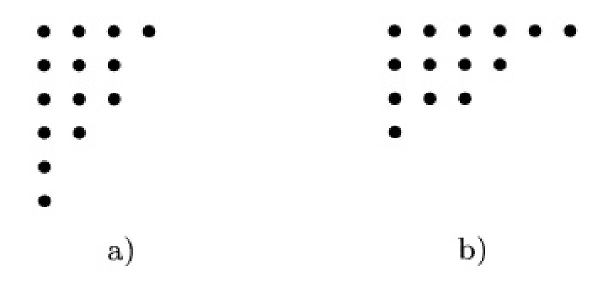
$$p(k,n) = p(k-1,n-1) + p(k-n,n)$$

La última fórmula nos permite elaborar la siguiente tabla de doble entrada:

$p(k,n)$

$k \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	$p(k)$
1	1							1
2	1	1						2
3	1	1	1					3
4	1	2	1	1				5
5	1	2	2	1	1			7
6	1	3	3	2	1	1		11
7	1	3	4	3	2	1	1	15

Los llamados *gráficos de Ferrers* son útiles a menudo para realizar descomposiciones en sumandos de números enteros. Se representa la descomposición en sumandos de modo que el número de puntos en cada fila disminuye al descender de fila. En la figura siguiente están representadas dos descomposiciones de 14: a) 4+3+3+2+1+1 y b) 6+4+3+1. Se dice que el gráfico b) es *transpuesto* del gráfico a).



a) b)

En la figura tenemos dos particiones del número entero 14, una en 6 sumandos, en la que 4 es el mayor sumando. Otra, en 4 sumandos en la que 6 es el mayor sumando. Esto nos sugiere el resultado general: El número de particiones de un entero n en m sumandos es igual al número de particiones del entero n en sumandos donde m es el mayor de dichos sumandos.

6.5 Números de Catalan

Los llamados *números de Catalan*

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...$$

se obtienen mediante la fórmula recurrente:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, \ con \ C_0 = 1 \ y \ C_1 = 1$$

(ver ejercicios 6.6 y 6.7), y mediante la fórmula cerrada:

$$C_n = \frac{(2n)!}{n! \ (n+1)!} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

Para valores grandes de n, tenemos la fórmula asintótica:

$$C_n \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi \ n^3}}$$

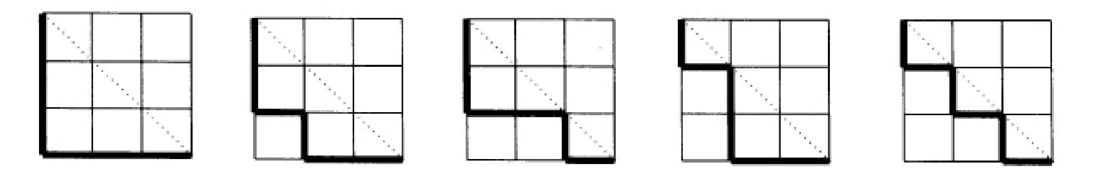
Los números de Catalan aparecen en una gran variedad de problemas, como se aprecia en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 6.9 *¿Cuál es el número de caminos de longitud* $2n$ *que conectan los extremos de una malla* $n \times n$ *y que no atraviesan su diagonal?*

Resolución: Son en total

$$C_n = \frac{(2n)!}{n! \ (n+1)!} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

Por ejemplo, para una malla 3 × 3:



Esto es:

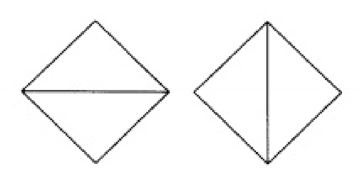
$$C_3 = \frac{6!}{3!\ 4!} = \frac{\binom{6}{3}}{4} = 5$$

Ejemplo 6.10 *¿De cuántas formas se puede dividir un polígono de $n+2$ lados en n triángulos?*

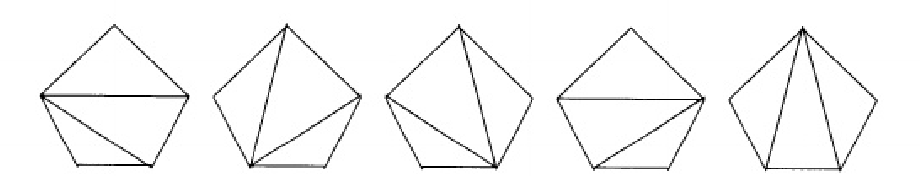
Se puede dividir en:

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!\ (n+1)!} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

Por ejemplo, para el caso de un triángulo $n+2=3$, está claro que existe una única división que coincide con el propio triángulo. Para el caso de dividir un cuadrilátero $n+2=4$ en $n=2$ triángulos, existen dos posibilidades:



Para el caso de dividir un pentágono $n+2=5$ en $n=3$ triángulos, existen $C_3 = \frac{\binom{6}{3}}{4} = 5$ posibilidades:



Ejemplo 6.11 *¿Cuántos árboles binarios hay con n nudos?*

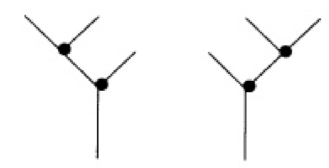
Hay exactamente:

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!\ (n+1)!} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

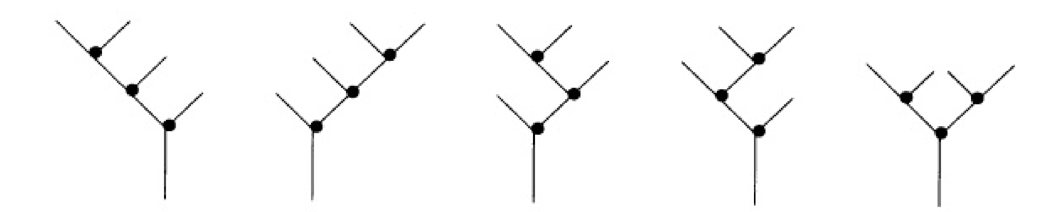
Por ejemplo, con un nudo hay un solo árbol:



Con dos nudos hay dos árboles:



Del mismo modo, existen 5 árboles binarios con 3 nudos:



Ejemplo 6.12 *Los números de Catalan son iguales al número de distintos perfiles de montañas que se pueden formar con n segmentos ascendentes y n segmentos descendentes.*

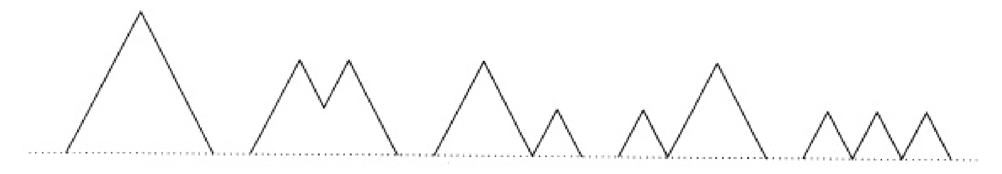
Por ejemplo, si disponemos de un segmento ascendente y uno descendente, podemos formar una sola montaña:



Si disponemos de dos segmentos ascendentes y dos descendentes, podemos obtener 2 perfiles distintos:



Si disponemos de tres segmentos ascendentes y dos descendentes, podemos obtener 5 perfiles distintos:



Del mismo modo, si disponemos de cuatro segmentos ascendentes y cuatro descendentes, podremos obtener 15 perfiles distintos.

Nota.- En la página www-math.mit.edu/srstan/ec de Richard Stanley se presentan multitud de ejemplos y situaciones que desembocan en una sucesión de números de Catalan.

Eugène Charles Catalan. Nació en Brujas (Bélgica) en 1814. Murió en Lieja (Bélgica) en 1894. Fue alumno de Liouville, que lo recomendó para un puesto de profesor, pero sus actividades políticas perjudicaron su carrera académica. Sus contribuciones más importantes son en Teoría de Números y Fracciones Continuas.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 6.1 *Demostrar que los números de Stirling de segunda clase $S(n,3)$ verifican:*

$$S(n,3) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}, \quad para\ n \geq 3$$

Resolución: Lo haremos por inducción. Para $n = 3$ la fórmula es cierta:

$$S(3,3) = \frac{3^2 - 2^3 + 1}{2} = 1$$

Suponemos que la fórmula es cierta para $n = k$:

$$S(k,3) = \frac{3^{k-1} - 2^k + 1}{2}$$

Vamos a demostrarla para $n = k+1$. En efecto:

$$S(k+1,3) = S(k,2) + 3 \cdot S(k,3) = 2^{k-1} - 1 + 3\ \frac{3^{k-1} - 2^k + 1}{2} =$$

$$= \frac{2^k - 2 + 3^k - 3 \cdot 2^k + 3}{2} = \frac{3^k - 2^{k+1} + 1}{2}.$$

donde hemos aplicado las propiedades de los números de Stirling (sección 6.1):

$$S(k,m) = S(k-1,m-1) + m \cdot S(k-1,m)$$

$$S(k,2) = 2^{k-1} - 1$$

Ejercicio 6.2 *Demostrar que* $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

Resolución: $S(n, n-1)$ *es el número de maneras de partir un conjunto de* n *elementos en* $n-1$ *partes no vacías, esto es, una de tamaño 2 y el resto de tamaño 1. Por otra parte, el número de maneras de seleccionar esos dos elementos es igual a* $\binom{n}{2}$.

Ejercicio 6.3 *Demostrar que* $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Resolución: $S(n, 2)$ *es el número de maneras de partir un conjunto de* n *elementos en 2 partes. De dichas dos partes, seleccionamos aquella que contiene un elemento determinado, que llamamos* x*. Para completar esta parte, elegimos un subconjunto del conjunto de los restantes* $n-1$ *elementos. Tenemos* $2^{n-1} - 1$ *elecciones posibles (ver sección 6.1.1).*

Ejercicio 6.4 *Determinar el número de relaciones de equivalencia que se pueden definir en un conjunto con un elemento. Idem en un conjunto con dos elementos. Idem con tres, cuatro, etc.*

Resolución: El número de relaciones de equivalencia que se pueden definir en un conjunto de cardinal n *es igual al número de particiones de dicho conjunto en* k *partes no vacías* $(1 \leq k \leq n)$*. Es decir, es igual a los números de Bell:*

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k) = S(n,1) + S(n,2) + \ \dots \ + S(n,n)$$

Para el caso de un conjunto unitario, $S(1,1) = 1$.

Para el caso de un conjunto con dos elementos, $S(2,1) + S(2,2) = 1 + 1 = 2$.

Para el caso de un conjunto con tres elementos, $S(3,1) + S(3,2) + S(3,3) = 1 + 3 + 31 = 5$.

Para el caso de un conjunto con cuatro elementos, $S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) + S(4,4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$.

La sucesión de los números de Bell:

$$1, \ 2, \ 5, \ 15, \ 52, \ 203, \ 877, \ 4140, 21147, \ \dots$$

da el número de relaciones de equivalencia que se pueden definir.

Ejercicio 6.5 *Verificar que los números de Bell permiten contar el número de esquemas de rimado de una estrofa poética.*

Resolución: Evidentemente, una estrofa de un solo verso tiene un único esquema de rimado. Una estrofa de dos versos tiene dos esquemas de rimado (los dos versos riman o no):

$$\begin{matrix} a & a \\ a & b \end{matrix}$$

Una estrofa de tres versos tiene 5 esquemas de rimado:

a	a	a	a	a
a	a	b	b	b
a	b	a	b	c

Del mismo modo, una estrofa de cuatro versos tiene 14 esquemas de rimado, y así sucesivamente.

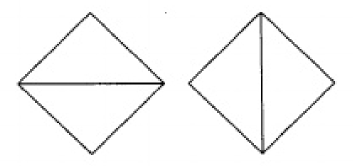
Ejercicio 6.6 *Demostrar la fórmula recurrente de los números de Catalan*

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, \quad C_0 = 1, \quad C_1 = 1$$

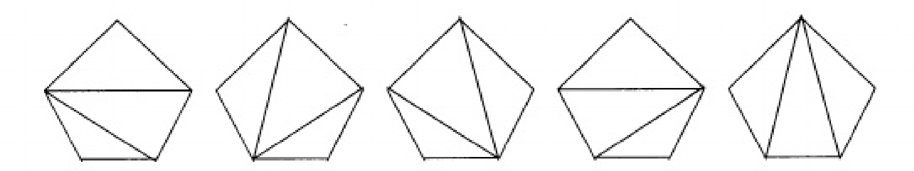
mediante descomposición en triángulos de un polígono.

Resolución: Tenemos un polígono convexo de $n+2$ *vértices que queremos descomponer en* n *triángulos mediante* $n-1$ *diagonales que no se cortan en el interior del polígono.*

Por ejemplo, para el caso de un triángulo ($n+2=3$)*, está claro que existe una única división que coincide con el propio triángulo. Para el caso de dividir un cuadrilátero* ($n+2=4$) *en* $n=2$ *triángulos, existen dos posibilidades que se muestran en la figura siguiente:*



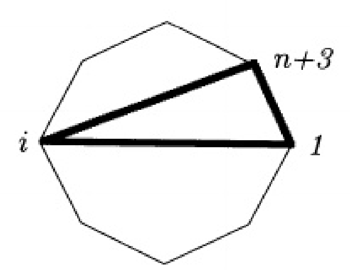
Para el caso de dividir un pentágono ($n+2=5$) *en* $n=3$ *triángulos, existen 5 posibilidades que se muestran en la figura siguiente:*



Del mismo modo, es fácil verificar que para un hexágono existen 14 maneras de hacer su descomposición en triángulos. Pero, al aumentar los valores de n*, el recuento es cada vez más complicado. Es necesario encontrar una fórmula recurrente que nos permita hacerlo con comodidad.*

Llamamos C_n *al número de maneras posibles de descomponer en* n *triángulos un polígono de* $n+2$ *vértices, y deseamos saber de cuántas maneras* C_{n+1} *podemos descomponer un polígono de* $n+3$ *vértices, que hemos numerado* $1, 2, 3, \ldots, n+3$*. Para ello, consideremos el triángulo* T *de vértices* 1 *y* $n+3$*, y tercer vértice, que llamamos*

i, perteneciente al conjunto $\{2,\ 3,\ ...,\ n+1,\ n+2\}$, resaltado con trazo grueso en la figura:



Si eliminamos dicho triángulo T, el polígono original queda dividido en dos polígonos que se encuentran descompuestos en triángulos. El primero, de vértices $1,\ 2,\ ...,\ i$. Por tanto, podemos descomponer en triángulos dicho polígono de C_{i-2} maneras. El segundo, de vértices $i,\ i+1,\ ...,\ n+3$. Del mismo modo, podemos descomponer este segundo polígono de C_{n-i+2} maneras. Las dos descomposiciones son independientes. Por tanto, el total de maneras en que podemos descomponer el polígono original y que contienen al triángulo T es:

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \ ... + C_{n-1}C_1 + C_nC_0 = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k}$$

Las condiciones iniciales son $C_0 = C_1 = 1$. Mediante la anterior fórmula recurrente se calculan los números de Catalan:

$$C_2 = C_0 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$C_3 = \sum_{k=0}^{2} = C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$C_4 = \sum_{k=0}^{3} = C_0 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_1 + C_3 \cdot C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$$

que es la sucesión de números de Catalan:

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ 4862,\ 16796,\ ...$$

Ejercicio 6.7 *Encontrar una fórmula para C_n, el número de formas de poner paréntesis al producto de $n+1$ números $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$, para indicar el orden de multiplicación. Por ejemplo, $C_3 = 5$, ya que hay 5 maneras de poner paréntesis a la expresión $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ para indicar el orden de multiplicación. En efecto:*

$$((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3, \quad (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3, \quad (x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3),$$

$$x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3), \quad x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$$

Resolución: Observamos que hay un operador "$\cdot$" que queda fuera de los paréntesis, el correspondiente al último producto efectuado. Por ejemplo, en $(x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$ es el segundo; en $(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3$, es el tercero.

Este último operador aparecerá entre dos factores x_k *y* x_{k+1}, *y habrá* $C_k \cdot C_{k+1}$ *formas de poner paréntesis para determinar el orden de multiplicación de los* $n+1$ *factores. Como este producto aparece para cualquier pareja de números, tenemos que:*

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}$$

Las condiciones iniciales son $C_0 = C_1 = 1$. *Por tanto:*

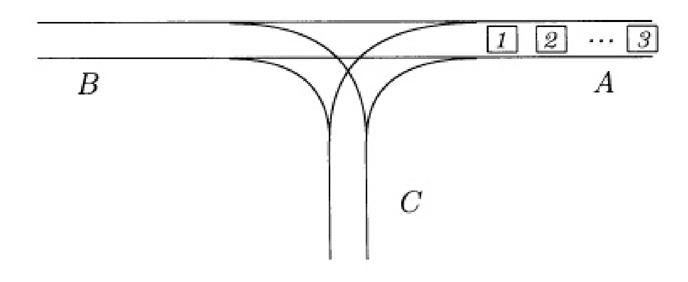
$$C_2 = C_0 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$C_3 = \sum_{k=0}^{2} = C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_1 + C - 2 \cdot C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$C_4 = \sum_{k=0}^{3} = C_0 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 + C - 2 \cdot C_1 + C_3 \cdot C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$$

que es la sucesión de números de Catalan.

Ejercicio 6.8 *La figura representa una línea de ferrocarril. En el punto A hay n vagones sueltos y numerados de 1 a n. Dichos vagones se pueden mover de A a B, de A a C y de C a B, pero nunca de B a A, ni de C a A, ni de B a C.*



¿De cuántas formas es posible reagrupar los vagones en el punto B?

Resolución: Si disponemos de un único vagón en A, es evidente que hay una única manera de estacionarlo en B.

Si disponemos de dos vagones en A, 1 y 2, tenemos dos maneras de reagruparlos en B: 12 y 21 (llevando el vagón 1 a C, a continuación el vagón 2 a B y, por último, el vagón 1 a B).

Si disponemos de tres vagones 1, 2 y 3, tenemos 5 maneras de reagruparlos en B. En efecto, con el vagón 1 en primer lugar tenemos: 123, 132. Con el vagón 2 en primer lugar (llevándolo a C en primer lugar) tenemos : 213, 231. Sin embargo, con el vagón 3 en primer lugar tenemos únicamente el reagrupamiento 321, ya que el 312 es imposible.

Si disponemos de cuatro vagones 1, 2, 3 y 4, podemos reagruparlos de 14 maneras:

1234	2143	3214	4321
1243	2134	3421	
1324	2431		
1342	2341		
1423	2314		

El número de formas es la secuencia de los números de Catalan: 1, 2, 5, 14, 132, 429, ...

Ejercicio 6.9 *Un camino de Dyck de longitud 2n es una cadena que contiene n letras X y n letras Y, de modo que ningún segmento inicial de la cadena puede contener más letras Y que letras X. Por ejemplo, para n=3, tenemos 5 cadenas posibles:*

$$XXXYYY$$
$$XYXXYY$$
$$XYXYXY$$
$$XXYYXY$$
$$XXYXYY$$

Comprobar que el número de caminos de Dyck de longitudes iguales a 2 , 4 y 8, son exactamente los números de Catalan C_1, C_2 *y* C_4.

Resolución: Sólo existe un camino de Dyck de longitud igual a 2:

$$XY$$

ya que el camino YX *no es de Dyck porque el segmento inicial Y de la cadena contiene una Y y ninguna X.*

Los caminos de Dyck de longitud igual a 4 son $C_2 = 2$:

$$XXYY$$
$$XYXY$$

Los caminos de Dyck de longitud igual a 8 son $C_4 = 14$:

$$XXXXYYYY$$
$$XXXYXYYY$$
$$XXXYYXYY$$
$$XXXYYYXY$$
$$XXYXXYYY$$
$$XXYXYXYY$$
$$XXYYYYXY$$
$$XXYYXXYY$$
$$XXYYXYXY$$
$$XYXXXYYY$$
$$XYXXYXYY$$
$$XYXXYYXY$$
$$XYXYXXYY$$
$$XYXYXYXY$$

que también se puede comprobar mediante un diagrama de árbol.

Nota.- Si en el ejercicio anterior, interpretamos cada letra X como un paréntesis "(", y cada letra Y como un paréntesis ")", un camino de Dyck de longitud 2n podemos

interpretarlo como una expresión con n pares de paréntesis correctamente colocados. Así, para $n = 3$:

$$\begin{array}{c} ((())) \\ ()(()) \\ ()()() \\ (())() \\ (()()) \end{array}$$

Ejercicio 6.10 *El resultado final de un partido entre dos equipos A y B ha sido de empate a tres tantos: $3 - 3$. a) ¿De cuántas formas se pudo llegar a dicho resultado? b) ¿De cuántas formas se pudo llegar a ese resultado, si el equipo B no se adelantó nunca en el marcador? c) Analizar una posible generalización para un resultado final de empate a n tantos.*

Resolución: a) Supongamos que el equipo A marca 3 goles seguidos en primer lugar y, a continuación, el equipo B marca sus 3 goles. Lo representamos así:

$$AAABBB$$

El resultado será igual a todas las permutaciones posibles de las 6 letras $AAABBB$. Por tanto:

$$PR_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Las escribimos todas:

$AAABBB$	$AABBBA$	$ABAABB$	$BBBAAA$	$BBAAAB$	$BABBAA$
	$AABBAB$	$ABABAB$		$BBAABA$	$BABABA$
	$AABABB$	$ABABBA$		$BBABAA$	$BABAAB$
		$ABBBAA$		$BAAABB$	
		$ABBABA$		$BAABAB$	
		$ABBAAB$		$BAABBA$	

b) Si el resultado final es de empate a un tanto 1-1, sólo hay una forma de llegar a dicho resultado:

$$AB$$

es decir, marca primero el equipo A y a continuación el equipo B, ya que éste no puede marcar primero.

Si el resultado final es de empate a dos tantos 2-2, hay dos formas de llegar a dicho resultado:

$$AABB \quad ABAB$$

Si el resultado final es de empate a tres tantos 3-3, hay cinco formas de llegar a dicho resultado:

$$\begin{array}{ccc} AAABBB & AABABB & ABAABB \\ & AABBAB & ABABAB \end{array}$$

Del mismo modo, si el resultado final es de empate a cuatro tantos 4-4, hay catorce formas de llegar a dicho resultado:

$AAAABBBB$	$AAABABBB$	$AABAABBB$	$ABAAABBB$
	$AAABBABB$	$AABABABB$	$ABAABABB$
	$AAABBBAB$	$AABABBAB$	$ABAABBAB$
	$AABBAABB$	$ABABABAB$	
	$AABBABAB$	$ABABAABB$	

c) Las posibles secuencias de resultados obtenidas: 1, 2, 5, 14, ... es la sucesión de números de Catalan.

Ejercicio 6.11 *Consideremos n semicírculos sobre una línea horizontal, de modo que no se corten entre sí. Para* $n = 2$, *hay dos formas distintas de dibujarlos, como se ve en la siguiente figura:*



Para $n = 3$, *hay 5 formas de dibujarlos:*



¿Cuántas formas hay para $n = 4$*? ¿y para* $n = 5$*?*

Resolución: Para $n = 4$ *y* $n = 5$, *tenemos 14 y 42 formas, obteniéndose la sucesión de números de Catalan.*

Ejercicio 6.12 *Consideremos un conjunto de cuatro cifras, constituido por dos 1 y dos -1. ¿De cuántas maneras podemos ordenarlas de modo que las sumas parciales sean no negativas? ¿Y si disponemos de tres 1 y tres -1? ¿Y si disponemos de n cifras iguales a 1 y n cifras iguales a -1?*

Evidentemente, hemos de colocar un 1 en primer lugar (1≥0). En segundo lugar podemos colocar un 1 (la suma parcial será 1+1=2) o un -1 (la suma parcial será 1+(-1)=0). Hay dos maneras:

$$1, 1, -1, -1$$
$$1, -1, 1, -1$$

Si disponemos de tres 1 y tres -1, hay cinco maneras:

$$1, 1, 1, -1, -1, -1$$
$$1, 1, -1, -1, 1, -1$$
$$1, -1, 1, 1, -1, -1$$
$$1, 1, -1, 1, -1, -1$$
$$1, -1, 1, -1, 1, -1$$

En general, si tenemos 2n cifras, la mitad iguales a 1 y la otra mitad iguales a -1, podemos ordenarlos de $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ *maneras, de modo que las sumas parciales sean no negativas, apareciendo de nuevo los números de Catalan.*

Capítulo 7

Distribuciones

La Combinatoria no es otra cosa que meter bolas en urnas.
Paul Halmos

Vamos a revisar los distintos tipos de distribuciones de objetos en cajas, algunos de los cuales ya han sido estudiados anteriormente. Su interés radica en que muchos problemas de combinatoria se resuelven mediante un problema equivalente de distribución de objetos en cajas.

Dados k objetos (diferentes o idénticos), queremos saber de cuántas formas podemos distribuirlos en n recipientes (diferentes o idénticos). Una distribución es una aplicación del conjunto de los objetos (de cardinal k) en el conjunto de los recipientes (de cardinal n).

Podemos considerar el orden de los objetos dentro de los recipientes o no, y así obtenemos distribuciones ordenadas y distribuciones no ordenadas, respectivamente.

7.1 Distribuciones no ordenadas

Consideremos las distribuciones no ordenadas de k objetos en n recipientes, esto es, las aplicaciones del conjunto de los objetos (de cardinal k) en el conjunto de los recipientes (de cardinal n) sin importar el orden de colocación de los objetos dentro de los recipientes.

Como los objetos pueden ser diferentes o idénticos, al igual que los recipientes, tenemos, en principio, cuatro posibles tipos de distribuciones:

1. Distribuciones de k **objetos diferentes** en n **recipientes diferentes**.
2. Distribuciones de k **objetos diferentes** en n **recipientes idénticos**.
3. Distribuciones de k **objetos idénticos** en n **recipientes diferentes**.
4. Distribuciones de k **objetos idénticos** en n **recipientes idénticos**.

Además, puede ocurrir:

i. Quedan recipientes vacíos o recipientes con más de un objeto (aplicación cualquiera).

ii. Ningún recipiente queda vacío (aplicación sobreyectiva).

iii. En ningún recipiente hay más de un objeto (aplicación inyectiva).

iv. En cada recipiente hay exactamente un objeto (aplicación biyectiva).

Por tanto, tenemos un total de $4 \times 4 = 16$ distribuciones no ordenadas de k objetos en n recipientes. A continuación, vamos a desarrollar cada una de ellas.

7.1.1 Distribuciones de k OBJETOS DIFERENTES en n RECIPIENTES DIFERENTES

Este problema ya lo hemos estudiado y resuelto anteriormente mediante variaciones con repetición (sección 4.1.3).

Los siguientes problemas son equivalentes:

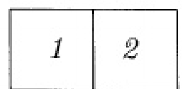
a) El número de variaciones con repetición de n elementos de orden k.

b) El número de aplicaciones de un conjunto con k elementos a un conjunto con n elementos.

c) El número de distribuciones de k objetos diferentes en n recipientes diferentes, con la posibilidad de dejar algún recipiente vacío o conteniendo más de un objeto.

Este número común es $VR_{n,k} = n^k$.

Ejemplo 7.1 *Tres niños, Ángel, Beatriz y Carmen, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos habitaciones diferentes 1 y 2, donde poder colocar a los niños para dormir:*



¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los tres niños en las dos habitaciones? (puede quedar alguna habitación vacía).

Resolución: Consideramos que los objetos son los niños y los recipientes son los dormitorios. Se trata de distribuir 3 objetos diferentes (niños) en 2 recipientes diferentes (habitaciones), pudiendo quedar algún recipiente vacío. Entonces, el total de distribuciones es:

$$VR_{2,3} = 2^3 = 8$$

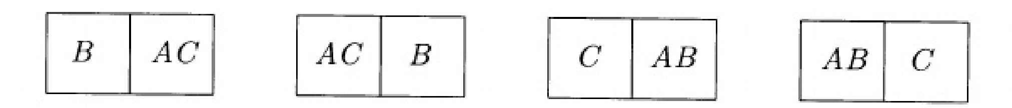
En efecto, si nombramos a los niños con sus iniciales A, B y C, tenemos las ocho distribuciones posibles:

ABC	

	ABC

A	BC

BC	A



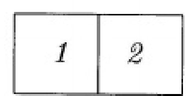
Si lo que queremos es que no quede ningún recipiente vacío (aplicación sobreyectiva), tenemos que los siguientes problemas son equivalentes:

a) El número de distribuciones de k objetos diferentes en n recipientes diferentes, sin dejar ningún recipiente vacío.

b) El número de aplicaciones suprayectivas de un conjunto de cardinal k sobre un conjunto con cardinal n.

Este número común es $n! \cdot S(k, n)$, donde $S(k, n)$ representa un número de Stirling de segunda clase (sección 6.1) .

Ejemplo 7.2 *Consideremos de nuevo el ejemplo 7.1. Tres niños, Ángel, Beatriz y Carmen, van a pasar la noche en casa de su abuela. Ésta dispone de dos habitaciones diferentes 1 y 2, donde poder colocar a los niños para dormir:*

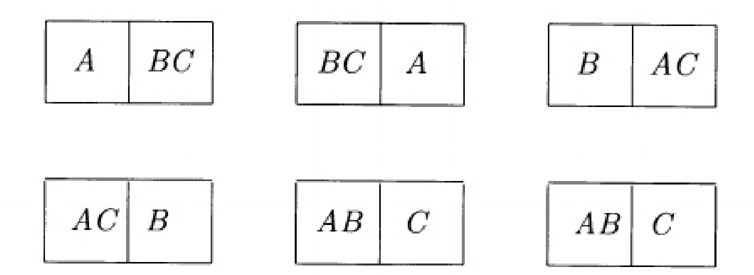


¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los tres niños en las dos habitaciones sin dejar ninguna habitación vacía?

Resolución: Se trata ahora de repartir 3 objetos diferentes (niños) en 2 recipientes diferentes (habitaciones), sin dejar vacía ninguna de las dos habitaciones. Por tanto, la solución es:

$$S(3,2) \cdot 2! = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

En efecto, si nombramos a los niños con sus iniciales A, B y C, tenemos las seis distribuciones posibles:



Si lo que queremos es que no haya más de un objeto en cada recipiente (aplicación inyectiva), tenemos que los siguientes problemas son equivalentes (ver sección 4.1):

a) El número de variaciones de n elementos de orden k.

b) El número de aplicaciones inyectivas de un conjunto con k elementos en un conjunto con n elementos.

c) El número de distribuciones de k objetos diferentes en n recipientes diferentes, colocando no más de un objeto en cada recipiente.

Este número común es $V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)$.

Por último, si lo que queremos es que en cada recipiente haya exactamente un objeto (aplicación biyectiva), el número de distribuciones será $P_n = n!$

7.1.2 Distribuciones de k OBJETOS DIFERENTES en n RECIPIENTES IDÉNTICOS

Para $k \geq n$, la suma de los siguientes números de Stirling de segunda clase:

$$S(k,1) + S(k,2) + \ldots + S(k,n)$$

nos da el número de formas de distribuir k objetos diferentes en n recipientes idénticos, admitiendo la posibilidad de recipientes vacíos.

Ejemplo 7.3 *Disponemos de 4 objetos: un lápiz, un bolígrafo, una pluma estilográfica y una goma de borrar. Los guardamos en 2 cajas idénticas. ¿De cuántas formas podemos hacerlo? (Existe la posibilidad de dejar una caja vacía).*

Resolución: Queremos repartir 4 objetos distintos en 2 recipientes idénticos, con la posibilidad de dejar un recipiente vacío. Por tanto:

$$S(4,1) + S(4,2) = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1 + 7 = 8 \ formas$$

Nombrando a los 4 objetos por sus letras iniciales L, B, P y G, tenemos:

L PG	*B*	*B PG*	*L*	*B LG*	*P*	*B PL*	*G*
LB	*PG*	*LG*	*PB*	*LP*	*BG*	*LB PG*	

Si queremos que no quede ningún recipiente vacío (aplicación sobreyectiva):

$$S(4,2) = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7 \ formas$$

Si queremos que haya un objeto como máximo en los recipientes (aplicación inyectiva o biyectiva), la respuesta es 1.

7.1.3 Distribuciones de k OBJETOS IDÉNTICOS en n RECIPIENTES DIFERENTES

Este problema también lo hemos estudiado y resuelto anteriormente mediante combinaciones con repetición (sección 4.4).

Los siguientes problemas son equivalentes:

a) El número de combinaciones con repetición de n elementos de orden k.

b) El número de distribuciones de k objetos idénticos en n recipientes diferentes, pudiendo quedar algún recipiente vacío o con más de un objeto.

Este número común es $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

Por otra parte, si distribuimos k objetos idénticos en n recipientes diferentes, pudiendo quedar alguno vacío, y llamamos x_i al número de objetos guardados en el recipiente i, $1 \leq i \leq n$, tenemos que:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$$

Es decir, el número de distribuciones de k objetos idénticos en n recipientes diferentes coincide con el número de soluciones enteras no negativas (incluimos el cero) de la ecuación anterior y es igual a $CR_{n,k}$.

Ejemplo 7.4 *¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$?*

Resolución: El número de soluciones (incluidas las iguales a cero) es

$$CR_{3,5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$$

a continuación escribimos las ternas, teniendo presente que, por ejemplo, la terna 113 corresponde a la solución $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$:

113	041	500
131	140	023
311	104	032
122	410	230
221	401	203
212	005	302
014	050	320

Si no consideramos las soluciones con valores iguales a cero, la respuesta sería $C_{5-1,3-1} = \binom{4}{2} = 6$, que correspondería a:

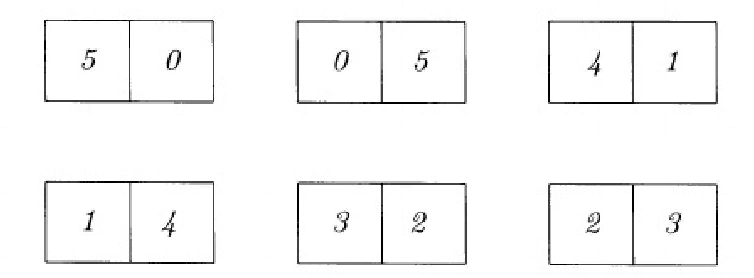
113	311	221
131	122	212

Ejemplo 7.5 *Tenemos 5 pasteles iguales. ¿De cuántas formas podemos repartirlos entre 2 niños? (algún niño puede quedarse sin pasteles).*

Resolución: Queremos distribuir 5 objetos idénticos (pasteles) en 2 recipientes diferentes (niños) con la posibilidad de dejar algún recipiente vacío. La respuesta es:

$$CR_{2,5} = \binom{2+5-1}{5} = \binom{6}{5} = 6$$

En efecto, las 6 distribuciones posibles son:



Por otra parte, el número de distribuciones de k objetos idénticos en n recipientes diferentes sin dejar ninguno vacío (aplicación sobreyectiva), es igual al número de soluciones enteras positivas de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$$

Es decir, $x_i > 0$. O lo que es lo mismo, $x_i \geq 1 \Rightarrow y_i = x_i - 1 \geq 0$.

Si en la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ restamos 1 a cada incógnita, queda:

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + ... + (x_n - 1) = k - (1 + 1 + ...^{(n)}... + 1)$$

Hacemos el cambio $x_i - 1 = y_i$:

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = k - n$$

cuyo número de soluciones enteras no negativas $y_i = x_i - 1 \geq 0$ pretendemos averiguar y que, aplicando lo visto anteriormente, es:

$$CR_{n,k-n} = \binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1} = C_{k-1,n-1}$$

como vimos en la sección 4.2, ya que

$$\binom{k-1}{k-n} = \frac{(k-1)!}{(k-n)! \cdot (k-1-k+n)!} = \frac{(k-1)!}{(k-n)! \cdot (n-1)!} = \binom{k-1}{n-1}$$

Ejemplo 7.6 *Tenemos 5 pasteles iguales. ¿De cuántas formas podemos repartirlos entre 2 niños de modo que ninguno de los dos niños se quede con las manos vacías?*

Resolución: Es igual al ejercicio anterior pero ahora no se puede dejar a ninguno de los dos niños con las manos vacías. Es decir, queremos distribuir 5 objetos idénticos (pasteles) en 2 recipientes diferentes (niños) sin dejar ningún recipiente vacío. La respuesta es:

$$CR_{2,5-2} = CR_{2,3} = \binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4$$

En efecto, las 4 distribuciones posibles son:

4	*1*	*1*	*4*	*3*	*2*	*2*	*3*

Si no queremos que cada recipiente contenga más de un objeto (aplicación inyectiva), tenemos los siguientes problemas equivalentes:

a) El número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de cardinal n.

b) El número de combinaciones de n elementos de orden k.

c) El número de distribuciones de k objetos idénticos en n recipientes diferentes, de modo que no haya en cada recipiente más de un objeto.

d) El número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1} = n+1$.

Este número común es $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ejemplo 7.7 *¿De cuántas maneras se pueden distribuir 3 objetos idénticos en 4 recipientes diferentes de modo que en cada recipiente no haya más de un objeto?*

Resolución: Llamemos $\{a_1, a_2, a_3\}$ al conjunto de los 3 objetos y $\{1, 2, 3, 4\}$ al conjunto de los 4 recipientes. Consideremos una de estas distribuciones, por ejemplo la que corresponde a colocar el objeto a_1 en el recipiente 1, el objeto a_2 en el recipiente 2 y el objeto a_3 en el recipiente 3, quedando vacío el recipiente 4. La configuración que corresponde a esta distribución es $a_1a_2a_3-$, que coincide con $a_2a_1a_3-$ pues los objetos son idénticos. Por tanto, el número de distribuciones es $C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$.

Por último, si lo que queremos es que es cada recipiente haya exactamente un objeto (aplicación biyectiva), el número de distribuciones es igual a 1.

7.1.4 Distribuciones de k OBJETOS IDÉNTICOS en n RECIPIENTES IDÉNTICOS

El número de distribuciones de k objetos en n recipientes ($n \leq k$) para los casos en que tanto los objetos como los recipientes son idénticos, se obtienen de la siguiente manera (ver sección 6.4):

a) Si algunos recipientes pueden estar vacíos:

i) Si $n = k$, su valor es $p(k)$.

ii) Si $n < k$, su valor es $p(k, 1) + p(k, 2) + \ ... \ + p(k, n)$.

b) Si ningún recipiente puede estar vacío (aplicación sobreyectiva), su valor es $p(k, n)$.

Si lo que queremos es que cada recipiente no contenga más de un objeto (aplicación inyectiva o biyectiva), el número de distribuciones es 1.

Ejemplo 7.8 *Tenemos 4 objetos idénticos y 2 cajas idénticas. ¿De cuántas formas podemos repartir los objetos en las cajas? a) Con la posibilidad de que quede una caja vacía. b) Sin que quede ninguna caja vacía.*

Resolución: a) Tenemos que $k = 4$ y $n = 2$. El total de distribuciones es:

$$p(4, 1) + p(4, 2) = 1 + 2 = 3$$

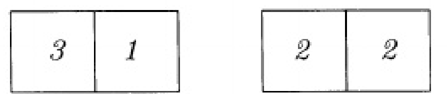
En efecto:

4	*0*	*3*	*1*	*2*	*2*

b) Si no existe la posibilidad de dejar una caja vacía, el total de distribuciones posibles es:

$$p(4,2) = 2$$

En efecto:



7.2 Cuadro resumen

Por último, en la tabla siguiente resumimos las clases de distribuciones de k objetos en n recipientes y las fórmulas de conteo correspondientes. Consideraremos una distribución de objetos en recipientes como una aplicación del conjunto de los objetos en el conjunto de los recipientes.

Según se tenga en cuenta o no el orden de los objetos dentro de los recipientes y según se tenga en cuenta que dichos objetos sean idénticos o diferentes, al igual que los recipientes, se obtienen 6 distribuciones distintas (en realidad son 8, pero si los objetos son idénticos, el ordenarlos carece de sentido). A partir de cada una de estas 6 se obtienen otras 4 según que la colocación sea:

1. *Cualquiera*: Un número cualquiera de objetos por recipiente o incluso recipientes vacíos.
2. *Sobreyectiva*: Al menos un objeto por recipiente.
3. *Inyectiva*: No más de un objeto por recipiente.
4. *Biyectiva*: Un objeto por recipiente.

Por otra parte, las fórmulas de recuento vienen simbolizadas de la siguiente manera:

$V_{n,k}$, variaciones de n objetos de orden k.

P_n, permutaciones de n objetos.

$C_{n,k}$, combinaciones de n objetos de orden k.

$VR_{n,k}$, variaciones con repetición de n objetos de orden k.

PR_n^k, permutaciones con repetición de n objetos de los que k son iguales.

$CR_{n,k}$, combinaciones con repetición de n objetos de orden k.

$S(k,n) = \left\{ {k \atop n} \right\}$, números de Stirling de segunda especie.

$L(k,n) = \frac{k!}{n!}\binom{k-1}{n-1}$, números de Lah.

$$A(k,n) = \sum_{r=1}^{k} L(k,r) = L(k,1) + L(k,2) + ... + L(k,n).$$

$$p(k) = \sum_{i=1}^{n} p(k,i).$$

$p(k,n) = p(k-1, n-1) + p(k-n, n)$ (ver sección 6.4).

7.2.1 Distribuciones no ordenadas

Vamos a considerar, en primer lugar, las 16 distribuciones **no ordenadas** de k objetos (diferentes o no) en n recipientes (diferentes o no) (numeradas de 1 a 16 en el cuadro siguiente).

	¿Objetos diferentes?	¿Recipientes diferentes?	Tipo de aplicación	Número de distribuciones
1	sí	sí	cualquiera	$VR_{n,k} = n^k$
2	sí	sí	sobreyectiva	$S(k,n) \cdot n!$
3	sí	sí	inyectiva	$V_{n,k}$
4	sí	sí	biyectiva	$n!$
5	sí	no	cualquiera	$S(k,1) + S(k,2) + ... + S(k,n)$
6	sí	no	sobreyectiva	$S(k,n)$
7	sí	no	inyectiva	1
8	sí	no	biyectiva	1
9	no	sí	cualquiera	$CR_{n,k}$
10	no	sí	sobreyectiva	$CR_{n,k-n} = C_{k-1,n-1}$
11	no	sí	inyectiva	$C_{n,k}$
12	no	sí	biyectiva	1
13	no	no	cualquiera	$p(k),\ si\ n = k;\ \sum_{r=1}^{n} p(k,r),\ si\ n < k$
14	no	no	sobreyectiva	$p(k,n)$
15	no	no	inyectiva	1
16	no	no	biyectiva	1

7.2.2 Distribuciones ordenadas

En segundo lugar, las 8 distribuciones **ordenadas** de k objetos diferentes (si son iguales, carece de sentido), en n recipientes (diferentes o no) (numeradas de 17 a 24 en el cuadro siguiente).

	¿Objetos diferentes?	¿Recipientes diferentes?	Tipo de aplicación	Número de distribuciones
17	sí	sí	cualquiera	$k! \cdot CR_{n,k}$
18	sí	sí	sobreyectiva	$k! \binom{k-1}{n-1}$
19	sí	sí	inyectiva	$V_{n,k}$
20	sí	sí	biyectiva	$n!$
21	sí	no	cualquiera	$A(k,n)$
22	sí	no	sobreyectiva	$L(k,n)$
23	sí	no	inyectiva	1
24	sí	no	biyectiva	1

Las anteriores distribuciones se utilizan como modelo para resolver muchos problemas de combinatoria, como vimos en los anteriores ejemplos y veremos en los ejercicios siguientes.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 7.1 *¿De cuántas maneras se pueden repartir 4 galletas iguales entre tres niños? ¿Y si no puede quedar ningún niño con las manos vacías?*

Resolución: Consideramos que los niños son los recipientes ($n = 3$) y las galletas los objetos ($k = 4$). La solución es el número de distribuciones no ordenadas de 4 objetos idénticos en 3 recipientes diferentes, pudiendo quedar recipientes vacíos, es decir, una aplicación cualquiera. Corresponde a la distribución número 9 del cuadro resumen. Por tanto, la respuesta es

$$CR_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

Vamos a escribir las 15 posibilidades, donde el reparto 400 significa que el primer niño recibe 4 galletas, 0 el segundo y 0 el tercero:

400	040	004
310	130	103
301	031	013
220	202	022
211	121	112

Si no puede quedar ningún niño con las manos vacías, las posibilidades son tres: 211, 121 y 112, que corresponde a la distribución número 10 del cuadro resumen. Por tanto:

$$CR_{3,4-3} = CR_{3,1} = \binom{3+1-1}{1} = \binom{3}{1} = 3$$

Ejercicio 7.2 *Disponemos de 4 objetos: un lápiz, un bolígrafo, una pluma estilográfica y una goma de borrar. Los guardamos en 2 cajas idénticas. ¿De cuántas formas podemos hacerlo si tenemos en cuenta la colocación de los objetos dentro de las cajas?*

Resolución: Este ejercicio fue resuelto anteriormente (sección 7.1.2) sin tener en cuenta el orden dentro de las cajas, resultando $S(4,1) + S(4,2) = 8$.

Este caso (objetos distintos y cajas idénticas, con la posibilidad de cajas vacías o con más de un objeto) corresponde a la distribución número 21 del cuadro resumen. Por tanto:

$$A(4,2) = L(4,1) + L(4,2) = \frac{4!}{1!}\binom{3}{0} + \frac{4!}{2!}\binom{3}{1} = 24 + 12 \cdot 3 = 60$$

Ejercicio 7.3 *Para realizar un examen disponemos de 3 aulas distintas. Si no hay limitación en la capacidad de cada aula, ¿de cuántas formas podemos distribuir 100 alumnos en dichas aulas?*

Resolución: Queremos repartir 100 objetos distintos (alumnos) en 3 recipientes distintos (aulas). Corresponde a la distribución número 1 del cuadro resumen. Por tanto, la respuesta es:

$$VR_{3,100} = 3^{100} \ formas$$

Ejercicio 7.4 *Tres personas deben realizar siete trabajos distintos. Si ninguna persona puede quedar inactiva, ¿de cuántas maneras se pueden distribuir los siete trabajos entre ellas tres?*

Resolución: Hemos de repartir $k = 7$ *objetos distintos (trabajos) en* $n = 3$ *recipientes distintos (personas) de modo que no quede ningún recipiente vacío (persona inactiva). Corresponde a la distribución número 2 del cuadro resumen. Por tanto:*

$$S(7,3) \cdot 3! = 301 \cdot 6 = 1806 \ maneras$$

Ejercicio 7.5 *Un ascensor parte con 4 personas de la planta baja de un edificio y se detiene en cada una de las 6 plantas de dicho edificio. a) ¿De cuántas maneras diferentes pueden descender las 4 personas? b) ¿De cuántas maneras si no pueden bajar dos en el mismo piso?*

Resolución: a) Hemos de repartir $k = 4$ objetos distintos (personas) en $n = 6$ recipientes distintos (plantas). Corresponde a la distribución número 1 del cuadro resumen. Por tanto:

$$VR_{6,4} = 6^4 = 1296 \ maneras$$

b) Si dos personas no pueden bajar en el mismo piso, la aplicación entre personas y plantas ha de ser inyectiva. Corresponde al caso 3 del cuadro resumen. Por tanto:

$$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \ maneras$$

Ejercicio 7.6 *Un profesor tiene tres horas semanales dedicadas a tutoría de alumnos. Esta semana han acudido 6 alumnos a tutoría. ¿De cuántas maneras pueden haber acudido estos 6 alumnos si el profesor ha tenido alumnos en las tres horas?*

Resolución: Hemos de repartir $k = 6$ objetos distintos (alumnos) en $n = 3$ recipientes distintos (tutorías) de modo que no quede ningún recipiente vacío (tutoría sin alumnos). Corresponde a la distribución número 2 del cuadro resumen. Por tanto:

$$S(6,3) \cdot 3! = 90 \cdot 6 = 540 \ maneras$$

Ejercicio 7.7 *Queremos repartir 25 sillas iguales en cuatro habitaciones vacías. De cuántas formas podemos hacer el reparto si: a) Podemos dejar habitaciones sin sillas. b) No podemos dejar ninguna habitación sin sillas.*

Resolución: a) Hemos de repartir $k = 25$ objetos iguales (sillas) en $n = 4$ recipientes distintos (habitaciones) de modo que no quede ningún recipiente vacío (habitación sin sillas). Corresponde a la distribución número 9 del cuadro resumen. Por tanto:

$$CR_{4,25} = \binom{28}{25} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3 \cdot 2} = 3276 \ maneras$$

b) Si no podemos dejar ninguna habitación sin sillas, la correspondencia entre el conjunto de sillas y habitaciones ha de ser sobreyectiva (distribución número 10 del cuadro resumen). Por tanto:

$$C_{25-1,4-1} = \binom{24}{3} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2} = 2024 \ maneras$$

Otra forma de interpretar el caso a) sería como el total de soluciones enteras no negativas (incluidas las iguales a cero) de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, esto es, $CR_{4,25}$. El caso b) sería el total de soluciones enteras positivas (excluidas las iguales a cero) de la anterior ecuación, esto es, $C_{25-1,4-1} = \binom{24}{3}$.

Ejercicio 7.8 *a) ¿Cuántas soluciones enteras no negativas (incluidas las iguales a cero) tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 6$? b) ¿Cuántas soluciones positivas tiene (quedan excluidas las iguales a cero)? c) ¿Cuántas de ellas verifican $1 \leq x_1 \leq 3$, $2 \leq x_2 \leq 4$, $1 \leq x_3 \leq 2$?*

Resolución: a) El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación viene dado por (sección 7.1.3):

$$CR_{3,6} = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \textit{ soluciones}$$

que damos a continuación:

006	105	222	330
015	114	213	402
024	123	231	411
033	132	240	420
042	141	303	501
051	150	312	510
060	204	321	600

b) Las soluciones positivas (quedan excluidas las iguales a cero) son (sección 7.1.3):

$$C_{6-1,3-1} = \binom{5}{2} = 10 \textit{ soluciones}$$

que damos a continuación:

114	222
123	231
132	312
141	321
213	411

c) Para hallar las que verifican $1 \leq x_1 \leq 3$, $2 \leq x_2 \leq 4$, $1 \leq x_3 \leq 2$, hacemos una tabla:

x_1	x_2	x_3
1	3	2
1	4	1
2	2	2
2	3	1
3	2	1

Son, en total, cinco soluciones.

Ejercicio 7.9 *Tenemos 2000 libros iguales. ¿De cuántas formas podemos distribuirlos en tres almacenes?*

Resolución: Queremos distribuir 2000 objetos iguales (libros) es tres recipientes diferentes (almacenes). Corresponde al caso número 9 del cuadro resumen:

$$CR_{2000,3} = \binom{2000+3-1}{3} = \binom{2002}{3} = 1335334000 \ formas$$

Ejercicio 7.10 *¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación* $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=21$*, tales que* x_1, x_2, x_3, x_4 *y* x_5 *verifican: a)* $x_1 \geq 1$*?, b)* $x_i \geq 2$*, para* $i=1,2,3,4,5$*?, c)* $0 \leq x_1 \leq 10$*?*

Resolución: a) Una solución de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=21$ *con la restricción* $x_1 \geq 1$*, corresponde a una selección de 21 elementos con* x_1 *elementos del primer tipo,* x_2 *elementos del segundo tipo, etc., donde, además, hay al menos un elemento del primer tipo (*$x_1 \geq 1$*). Por tanto, escogemos un elemento del primer tipo y los veinte restantes podemos escogerlos de*

$$CR_{5,20} = \binom{5+20-1}{20} = \binom{24}{20} = \binom{24}{4} = 10626 \ maneras$$

b) Análogamente, si hay al menos dos elementos del tipo uno, dos del tipo dos, ..., y dos del tipo cinco, los once restantes los escogemos de

$$CR_{5,11} = \binom{5+11-1}{11} = \binom{15}{11} = \binom{15}{4} = 1365 \ maneras$$

c) Al total de soluciones no negativas de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=21$*, esto es,* $CR_{5,21} = \binom{5+21-1}{21} = \binom{25}{21} = \binom{25}{4} = 12650$*, le restamos las que verifican* $x_1 \geq 11$*. Esto es, escogemos un elemento del tipo uno (*$x_1 \geq 11$*) y los diez restantes podemos escogerlos de* $CR_{5,10} = \binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10} = 1001$ *maneras. Por tanto, la respuesta es* $12650 - 1001 = 11649$ *soluciones.*

Ejercicio 7.11 *¿De cuántas formas se pueden distribuir cinco objetos indistinguibles en tres cajas indistinguibles?*

Resolución: Corresponde a la distribución número 13 del cuadro resumen:

$$\sum_{r=1}^{3} p(5,r) = p(5,1)+p(5,2)+p(5,3) = 1+2+2 = 5 \ formas \quad (ver\ sección\ 6.4)$$

que son:

500 410 311 320 221

Ejercicio 7.12 *¿De cuántas maneras pueden distribuirse cuatro alumnos en tres aulas distintas, si no se hace distinción de personas?*

Resolución: Corresponde a la distribución número 9 del cuadro resumen, esto es, queremos repartir cuatro objetos indistinguibles (alumnos, con perdón) en tres recipientes distintos (aulas):

$$CR_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

Ejercicio 7.13 *Seis personas viajan en una guagua que tiene diez paradas. ¿De cuántas maneras pueden apearse en los siguientes casos? a) Si a lo sumo baja una persona por parada, b) sin restricciones.*

Nota.- Resolver el problema considerando distinción de personas o no.

Resolución: Vamos a resolverlo considerando personas distinguibles. Si a lo sumo se baja una persona por parada, el problema corresponde a la distribución número 3 del cuadro resumen, esto es, queremos repartir seis objetos distintos (personas, con perdón) en diez recipientes distintos (paradas):

$$V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$$

Si en cada parada puede bajarse cualquier número de personas (desde ninguna hasta las seis personas), estamos en el caso número 1 del cuadro resumen:

$$VR_{10,6} = 10^6 = 1000000$$

Vamos a resolver de nuevo el problema considerando que las personas son indistinguibles. Si a lo sumo se baja una persona por parada, el problema corresponde a la distribución número 11 del cuadro resumen, esto es, queremos repartir seis objetos idénticos en diez recipientes distintos:

$$C_{10,6} = \binom{10}{6} = 210$$

Si en cada parada puede bajarse cualquier número de personas, estamos en el caso número 9 del cuadro resumen:

$$CR_{10,6} = \binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = 5005$$

Ejercicio 7.14 *¿De cuántas formas distintas pueden colorearse diez bolas de golf usando cuatro colores $\{a, b, c, d\}$, de modo que haya al menos tres bolas de color b y exactamente dos bolas de color d?*

Resolución: El problema es similar a colocar 5 bolas en tres urnas a, b y c. En b ya residen tres bolas. Es el caso número 9 del cuadro resumen:

$$CR_{3,5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21 \ formas.$$

Ejercicio 7.15 *Un restaurante dispone de cuatro tipos diferentes de menú. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar la comida una familia de seis miembros?*

Resolución: El problema es similar a colocar 6 bolas idénticas en cuatro urnas distintas a, b, c y d, ya que en este problema podemos considerar a las personas indistinguibles. Corresponde al caso 9 del cuadro resumen:

$$CR_{4,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84 \; maneras$$

Ejercicio 7.16 *Un ordenador tiene ocho trabajos para repartir entre sus cinco ordenadores auxiliares. Teniendo en cuenta que cada uno de ellos asume al menos un trabajo, ¿de cuántas maneras pueden repartirse las ocho tareas? Responder de nuevo a la cuestión anterior si los cinco ordenadores auxiliares son indistinguibles para el ordenador principal.*

Resolución: El problema es similar a colocar 8 objetos distintos (trabajos) en cinco recipientes distintos (ordenadores auxiliares). Corresponde al caso 2 del cuadro resumen:

$$S(8,5)\cdot 5! = [S(7,4) + 5\cdot S(7,5)]\cdot 5! = (350 + 5\cdot 140)\cdot 120 = 126000 \; maneras$$

Si los cinco ordenadores auxiliares son indistinguibles para el ordenador principal, el problema corresponde al caso 6 del cuadro resumen:

$$S(8,5) = S(7,4) + 5\cdot S(7,5) = 1050 \; maneras$$

Ejercicio 7.17 *¿De cuántas maneras se pueden distribuir siete caramelos idénticos en tres bolsas idénticas de modo que no quede ninguna bolsa vacía? ¿Y si se permite que queden bolsas vacías?*

Resolución: Corresponde al número 14 del cuadro resumen, $p(7,3) = 4$. *Los cuatro posibilidades son:*

511, 421, 331, 322

Si se permiten bolsas vacías, estamos en el caso 13 de dicho cuadro resumen, $p(7,1) + p(7,2) + p(7,3) = 1 + 3 + 4 = 8$. *Los ocho posibilidades son:*

700, 610, 520, 511, 430, 421, 331, 322

Capítulo 8

Funciones generatrices

8.1 Introducción

Las funciones generatrices se utilizan para resolver muchos problemas de conteo, como la distribución de objetos en recipientes teniendo en cuenta diferentes restricciones, resolver relaciones de recurrencia, demostrar identidades combinatorias o determinar fórmulas asintóticas para los términos de una sucesión.

La idea consiste en transformar aquellos problemas de combinatoria en problemas algebraicos, como veremos en el ejemplo de la sección siguiente.

8.2 Series simbólicas

Supongamos que disponemos de dos manzanas, tres naranjas y cuatro ciruelas y queremos dar una descripción compacta de todas las posibles selecciones que podemos hacer tomando al menos una fruta de cada tipo.

Simbolizando con M, N y C, la selección de una manzana, de una naranja o de una ciruela, la selección de una manzana, dos naranjas y tres ciruelas la simbolizamos

$$MNNCCC$$

o, de forma compacta, MN^2C^3. Por otra parte, consideraremos que la selección anterior es la misma que la selección N^2MC^3 o la selección C^3N^2M, y que nuestra selección de frutas puede ser MNC o MNC^2, pero no ambas a la vez. Si utilizamos el símbolo "$\vee$" para indicar la *disyunción* o *exclusión lógica*, esto último lo indicaremos

$$MNC \vee MNC^2$$

Por tanto, que podemos tomar una manzana, una naranja y una ciruela o una manzana, una naranja y dos ciruelas o una manzana, dos naranjas y una ciruela, etc., lo representamos por

$$MNC \vee MNC^2 \vee MN^2C \vee \ \dots \ \vee M^2N^3C^4$$

La anterior expresión indica todas las posibles maneras de escribir un monomio usando M o M^2, N, N^2 o N^3, C, C^2, C^3 o C^4 como factores. Dicho de otra manera, la expresión es el desarrollo de

$$(M \vee M^2)(N \vee N^2 \vee N^3)(C \vee C^2 \vee C^3 \vee C^4) \quad (8.1)$$

El anterior producto recibe el nombre de *serie simbólica* y describe todas las posibles selecciones de las tres frutas tomando una al menos de cada clase.

8.3 Función generatriz

Las posibles selecciones de seis frutas de la sección anterior corresponden a monomios como MN^2C^3, tales que sus exponentes suman seis. Así, debemos encontrar todos los monomios cuyo exponente suma seis. De otro modo, si reemplazamos cada M, N y C por x, el número de monomios será el coeficiente de x^6.

En efecto, sustituyendo en (7.1), M, N y C por x:

$$(x + x^2)(x + x^2 + x^3)(x + x^2 + x^3 + x^4) =$$

$$= x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 5x^7 + 3x^8 + x^9 \quad (8.2)$$

Hemos trasladado el problema al álgebra ordinaria transformando la expresión (8.1) en un polinomio en el que observamos que hay seis maneras de seleccionar seis piezas de fruta:

$$MNC^4, MN^2C^3, MN^3C^2, M^2NC^3, M^2N^2C^2, M^2N^3C$$

cinco maneras de seleccionar cinco piezas de fruta:

$$MNC^3, MN^2C^2, MN^3C, M^2NC^2, M^2N^2C$$

tres maneras de seleccionar cuatro piezas:

$$MNC^2, MN^2C, M^2NC$$

y así sucesivamente.

La expresión (8.2) la definiremos más adelante como *función generatriz* de la sucesión de coeficientes $1, 3, 5, 6, 5, 3, 1$.

Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 8.1 *¿De cuántas formas se pueden repartir ocho galletas iguales entre tres niños de modo que cada niño reciba al menos dos galletas y no más de cuatro?*

Resolución: Como cada niño recibe al menos dos galletas y no más de cuatro, para cada niño hay un factor de la forma

$$x^2 + x^3 + x^4$$

Para los tres niños:

$$(x^2 + x^3 + x^4)^3$$

Buscamos el coeficiente de x^8 en el desarrollo, ya que los términos de x^8 corresponden a las diferentes maneras de seleccionar tres términos, cada uno de un factor, de modo que sus exponentes sumen 8. Haciendo el desarrollo, encontramos que el coeficiente de x^8 es igual a 6. Por tanto, hay 6 maneras de distribuir las 8 galletas, que son:

$$224,\ 242,\ 422,\ 233,\ 323,\ 332$$

Ejemplo 8.2 *Determinar el número de soluciones de la ecuación $z_1 + z_2 + z_3 = 17$, donde z_1, z_2 y z_3 son números enteros no negativos tales que $2 \leq z_1 \leq 5$, $3 \leq z_2 \leq 6$ y $4 \leq z_3 \leq 7$.*

El número de soluciones con las condiciones del problema es igual al coeficiente de x^{17} en el desarrollo de

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$$

Dicho coeficiente es igual a 3. Por tanto, hay tres soluciones, que son

$$z_1 = 4,\ z_2 = 6,\ z_3 = 7$$

$$z_1 = 5,\ z_2 = 5,\ z_3 = 7$$

$$z_1 = 5,\ z_2 = 6,\ z_3 = 6$$

Definición 8.1 *La función generatriz de la sucesión de números reales a_0, $a_1, \ldots$, $a_k, \ldots$ es la serie infinita*

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x_k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Ejemplo 8.3 *La función generatriz de la sucesión de término general $a_k = k + 5$ es $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+5)\ x^k$.*

Ejemplo 8.4 *La función generatriz de la sucesión $1, 1, 1, 1, 1$ es $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, o si se prefiere $F(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$, aplicando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón x.*

Damos a continuación una tabla con las funciones generatrices más frecuentes y la sucesiones que las determinan.

a_k	$F(x)$
1	$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + ...$
a^k	$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\ x^k = 1 + ax + a^2x^2 + ...$
$k+1$	$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + ...$
$\binom{n}{k}$	$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}\ x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\ x + \binom{n}{2}\ x^2 + ...$
$\binom{n}{k}\ a^k$	$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}\ a^k x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\ ax + \binom{n}{2}\ a^2x^2 + ...$
$1/k!$	$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + ...$
$(-1)^{k+1}/k$	$ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}/k\ x^k = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + ...$

8.4 Funciones generatrices y relaciones de recurrencia

Si tenemos una fórmula recurrente con unas condiciones iniciales dadas, podemos encontrar la fórmula cerrada correspondiente a dicha relación recurrente utilizando su función generatriz asociada.

Ejemplo 8.5 *Encontrar una fórmula cerrada para la sucesión de término general* $a_n = 3\ a_{n-1} + 2$, *con* $a_0 = 1$.

La función generatriz es

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3\ a_{n-1} + 2)\ x^n$$

o, empezando por $n = 1$*:*

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3\ a_{n-1} + 2)\ x^n \Rightarrow$$

$$F(x) - 1 = 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\ x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \Rightarrow$$

$$F(x) - 1 = 3x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\ x^{n-1} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \Rightarrow$$

$$F(x) - 1 = 3x\ F(x) + 2x\ \frac{1}{1-x} \Rightarrow (1-3x)\ F(x) = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow$$

$$(1-3x)\ F(x) = \frac{1+x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-3x} \Rightarrow A = -1,\ B = 2$$

donde hemos realizado una descomposición en fracciones simples. Por tanto:

$$F(x) = \frac{-1}{1+x} + \frac{2}{1-3x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1 + 2 \cdot 3^n)\ x^n$$

utilizando la tabla de la página anterior. Por último:

$$a_n = -1 + 2 \cdot 3^n$$

8.5 Funciones generatrices e identidades

A veces, es posible demostrar algunas identidades mediante el uso de funciones generatrices, como vemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8.6 *Demostrar que es cierta la identidad*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

para todo valor natural de n.

Resolución: Dada la sucesión $a_k = \binom{n}{k}$ *y su función generatriz:*

$$F(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}\ x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\ x + \binom{n}{2}\ x^2 + ... + \binom{n}{n}\ x^n$$

tenemos que

$$(1+x)^{2n} = [(1+x)^n]^2 = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\ x + \binom{n}{2}\ x^2 + ... + \binom{n}{n}\ x^n\right]^2$$

En este desarrollo, el coeficiente de x^n *es*

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + ... + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

ya que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, $\forall i = 0, 1, ..., n$. *Por otra parte, el coeficiente de* x^n *en el desarrollo de* $(1+x)^{2n}$ *es* $\binom{2n}{n}$. *Por tanto,* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 8.1 *Hallar la función generatriz de la sucesión* 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Resolución: La función generatriz es:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\ x^n = 2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + 32x^4 + 64x^5 + ... = \frac{2}{1-2x}$$

que se obtiene utilizando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $2x$.

Ejercicio 8.2 *Hallar la función generatriz de la sucesión de término general* $a_n = 3^n$.

Resolución: La función generatriz es:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n\ x^n = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 + ... = \frac{2}{1-3x}$$

utilizando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $3x$.

Ejercicio 8.3 *Dada la función generatriz* $F(x) = \frac{1}{1-5x}$, *hallar la sucesión que determina.*

Resolución: La función generatriz es:

$$F(x) = \frac{1}{1-5x} = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n\ x^n = 1 + 5x + 25x^2 + 125x^3 + ...$$

que determina la sucesión de término general $a_n = 5^n$.

Ejercicio 8.4 *Hallar el coeficiente de* x^{10} *en el desarrollo de*

$$(x^4 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)(1 + x + x^2 + x^3)$$

Resolución: La respuesta es 9, puesto que hay 9 posibilidades:

$x^4x^3x^3,\ x^4x^4x^2,\ x^4x^5x,\ x^4x^6 \cdot 1,\ x^5x^3x^2,\ x^5x^4x,\ x^5x^5 \cdot 1,\ x^6x^3x^1,\ x^6x^4 \cdot 1$

Ejercicio 8.5 *Hallar el coeficiente de* x^{10} *en el desarrollo en serie de potencias de la función* $\frac{1}{1-3x}$.

Resolución: Es la suma de una progresión geométrica

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 + ...$$

El coeficiente de x^{10} *es* 3^{10}, *ya que los coeficientes son las potencias de* 3.

Ejercicio 8.6 *Hallar el coeficiente de* x^8 *en el desarrollo en serie de potencias de la función* $\frac{1}{(x-3)(x-2)}$.

Resolución: Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A-3B)}{(x-3)(x-2)}$$

Identificando coeficientes y resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ -2A-3B=1 \end{array}\right\}$$

se tiene que $A = 1$, $B = -1$. *Por tanto:*

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-2} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-x/3} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x/2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^i + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^i$$

El coeficiente de x^8 *será:*

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^8 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = -\frac{1}{3^9} + \frac{1}{2^9}$$

Ejercicio 8.7 *Disponemos de fichas de 1, 2 y 5 euros para comprar en una máquina expendedora un producto que cuesta 7 euros. ¿De cuántas formas distintas podremos pagarlo?*

Resolución: Consideremos que no importa el orden de introducir las fichas en la máquina. Por otra parte, la suma de las fichas introducidas ha de ser igual a 7 euros. Por tanto, debemos calcular el coeficiente de x^7 *en la función generatriz:*

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x^5 + x^{10} + ...)$$

donde el primer factor indica las fichas de 1 euro, el segundo las de 2 euros y el tercero las de cinco euros. El coeficiente de x^7 *en el desarrollo es igual a 6, lo que nos indica que hay 6 formas distintas de pagar, que son:*

1111111, 111112, 11122, 1222, 115, 25

Ejercicio 8.8 *Encontrar una fórmula cerrada para la sucesión de término general* $a_n = 8\ a_{n-1} + 10^{n-1},\ a_0 = 1$.

Resolución: La función generatriz es

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (8\ a_{n-1} + 10^{n-1})x^n$$

o también, empezando por $n = 1$*:*

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (8\ a_{n-1} + 10^{n-1})x^n \Rightarrow$$

$$F(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (8\ a_{n-1} + 10^{n-1})x^n = 8 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\ x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1}\ x^n =$$

$$= 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\ x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1}\ x^{n-1} = 8x \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} 10^n\ x^n =$$

$$= 8x\ F(x) + \frac{x}{1 - 10\ x}$$

donde hemos utilizado la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $10x$. *Despejando* $F(x)$*:*

$$F(x) = \frac{1 - 9x}{(1 - 8x)(1 - 10x)}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - 8x} + \frac{1}{1 - 10x} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\ (8^n + 10^n)\ x^n$$

Por tanto

$$a_n = \frac{1}{2}\ (8^n + 10^n)$$

Ejercicio 8.9 *Encontrar una fórmula cerrada para la sucesión de término general* $a_n = 2\ a_{n-1}$, *con* $a_0 = 1$.

Resolución: La función generatriz es

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$$

Multiplicando por x:

$$x\ F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\ x^n$$

Calculamos $F(x) - 2x\ F(x)$:

$$F(x) - 2x\ F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\ x^n =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\ x^n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - 2\ a_{n-1})\ x^n$$

pero $a_0 = 1$ *y* $a_n = 2\ a_{n-1}$ *por la hipótesis de recurrencia. Por tanto, tenemos:*

$$F(x) - 2x\ F(x) = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \Rightarrow a_n = 2^n$$

donde hemos aplicado la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica.

Índice

Bibliografía

[1] **ALMEIDA, P..**- *Introducción al Álgebra Discreta.* Manuales Docentes Universitarios de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. 2002.

[2] **ALMEIDA BENÍTEZ, P. R. Y FRANCO BRAÑAS, J. R..**-*Introducción a la Matemática Aplicada. Matemática Discreta.* Colección Textos Universitarios. Dirección General de Universidades e Investigación del Gobierno de Canarias. 2001.

[3] **ALMEIDA BENÍTEZ, P. R. Y FRANCO BRAÑAS, J. R..**- *Métodos Directos para Computación de Sistemas de Ecuaciones Lineales.* Colección Binomio Docencia-Investigación en Matemática Aplicada. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. 1998.

[4] **ANDERSON, IAN.**- *Introducción a la Combinatoria.* Editorial Vicens Vives. Barcelona. 1993.

[5] **BATANERO, M. CARMEN y otros.**- *Razonamiento Combinatorio.* Editorial Síntesis. Madrid. 1994.

[6] **BIGGS, W.L., LLOYD, E.K. and WILSON, E.K..**- *The History of Combinatorics.* **GRAHAM, R.L., GRÖTSCHD, M. and LOVÁSZ, L..**- *Handbook of Combinatorics.* Vol. I. North-Holland Ed.. The Netherlands. 1995.

[7] **BOGART, KENENTH P..**- *Introductory Combinatorics.* Harcourt Academic Press. San Diego (U.S.A.). 2000.

[8] **BRYANT, VICTOR.**- *Aspects of Combinatorics.* Cambridge University Press. UK. 1993.

[9] **ENGEL, ARTHUR.**-*Probabilidad y Estadística.* Mestral Universidad. Valencia. 1973.

[10] **FERRANDO, J.C. y GREGORI, V..**- *Matemática Discreta.* Editorial Reverté. Barcelona. 1994.

[11] **FRANCO BRAÑAS, J.R..**- *Cálculo I.* Colección Textos Universitarios. Dirección General de Universidades e Investigación del Gobierno de Canarias. 2001.

[12] **FRANCO BRAÑAS, J.R..**- *Introducción al Cálculo.* Editorial Pearson Prentice Hall. Madrid. 2003.

[13] **FURIO, ALBERTI.**- *National Council of Teachers of Mathematics.* Washington. 1969.

[14] **GÁRCIA MERAYO, FÉLIX**.- *Matemática Discreta.* Editorial Praninfo. Madrid. 2001.

[15] **GÁRCIA MERAYO, FÉLIX**.- *Problemas Resueltos de Matemática Discreta.* Editorial Thomson. Madrid. 2003.

[16] **GARDNER, MARTIN**.- *Festival Mágico-Matemático.* Alianza Editorial. Madrid. 1984.

[17] **GRIMALDI, RALPH P.**.- *Discrete and Combinatorial Mathematics.* Addison Wesley Longman. USA. 2000.

[18] **GUY, RICHARD K.**.- *The Second Strong Law of Small Numbers.* Mathematics Magazine, Vol 63, No. 1. 1990.

[19] **KNUTH, D.E.**.- *Algoritmos Fundamentales.* Editorial Reverté. Barcelona. 1980.

[20] **KORFHAGE, ROBERT R.**.- *Discrete Computational Structures.* Academic Press, Inc.. Orlando (U.S.A.). 1983.

[21] **LAZCANO, IGNACIO y otro**.- *Matemáticas 1 BUP.* Edelvives. Zaragoza. 1975.

[22] **PORTA, JAIME et al.**.- *Matemáticas 1 BUP. Factor 1.* Vicens Vives. Tarragona. 1975.

[23] **ROSAS, M. H.**.- *Los Números de (Euler)-Catalan.* Boletín de la Asoc. Mat. Venezolana, Vol X, No. 1. 2003.

[24] **ROSEN, KENNETH**.- *Matemática Discreta y sus aplicaciones.* Mac Graw Hill. Madrid. 2004.

[25] **STANLEY, RICHARD P.**.- *Catalan Addendum.* http://www-math.mit.edu/srstan/ec. 1999.

[26] **STRANG, GILBERT**. *Linear Algebra and its Applications.* Harcourt Brace Jovanovich Editor. San Diego (U.S.A.). 1988.

El objetivo fundamental de este libro es el de familiarizar al lector con las técnicas de *conteo*, diagramas de árbol y estrategias de resolución de problemas, aprovechando todo ello para introducir los conceptos básicos de la Combinatoria y mostrar varias de sus aplicaciones. La distribución de los temas del presente libro está hecha de acuerdo con los tres grandes grupos en que se dividen los problemas de la Combinatoria:

1. *Problemas de selección*. Dado un conjunto de n elementos, queremos *seleccionar* k de ellos. Utilizaremos los conceptos de Variaciones y Combinaciones, según importe o no el orden de selección.

2. *Problemas de partición y descomposición*. Dado un conjunto de n elementos, queremos hacer *partición* de él en subconjuntos de k elementos. O bien, dado un número natural n, que-